Die

Grundzüge der Mechanik

als

Leitfaden

bei

Vorlesungen und zum Selbststudium,

bearbeitet

von

J. Bitzel,

Professor an der Großherzogl. polytechnischen Schule zu Karlsruhe.

Mit neun Tafeln in Quer-Folio.

Stuttgart.

Carl Mäcken, Verlagsbuchhandlung.

1854.

Schnellpressendruck der Buchdruckerei von J. C. Mäcken Sohn in Reutlingen.

Vorwort.

Die Wissenschaft der Mechanik hat in gegenwärtiger Zeit eine solche Wichtigkeit erreicht, daß Keiner, dessen künftiger Beruf in irgend einer Beziehung zur Technik oder Industrie steht, die Kenntniß der Grundprincipien derselben mehr entbehren kann. Man ist daher auch allgemein bemüht, sie so zu bearbeiten, daß sie einem immer größern Publikum zugänglich wird, und es fehlt deßhalb auch nicht an Werken über diesen Gegenstand.

Je nach dem Zwecke behandeln sie denselben, aber entweder nur theilweise, oder ohne alle Anwendung, oder zu ausführlich, so daß es für den Anfänger immerhin schwer fällt, ein Buch zu finden, in welchem das gesammte Gebiet der Mechanik in seinen wesentlichsten Theilen kurz und klar behandelt ist, so zwar, daß er mit mäßigem Zeitaufwand den Stoff zu beherrschen, und selbständige Anwendung davon zu machen im Stande wäre. Diesem Bedürfniß sucht vorliegendes Werk zu entsprechen. Es behandelt, unter Voraussetzung der Kenntnisse der Elementarmathematik, mit geeigneter wissenschaftlicher Schärfe, die Hauptlehren der Mechanik fester und flüssiger Körper, und erläutert die abgeleiteten Gesetze durch vielfältige praktische Beispiele und Anwendungen, so daß es den Studirenden eines Theils für ein technisches oder industrielles Fach gründlich vorbereitet, andern Theils auch die Grundlage für das Studium der höhern Mechanik gibt. Als Leitfaden zum

Gebrauche beim Unterricht dürfte es demnach auch für manchen Lehrer eine willkommene Erscheinung sein.

Bei der Bearbeitung wurden die besten mir zugänglichen Werke benutzt, namentlich die von Kayser, Weisbach, Rühlmann, Burg, Poinsot, Poisson, Poncelet u. A. Die vorkommenden Maße und Gewichte sind entweder französische oder badische.

Möge dieses Buch seinen Zweck erreichen und eine rücksichtsvolle Aufnahme finden.

Karlsruhe, im Juni 1854.

Der Verfasser.

Inhalt.

Vierter Abschnitt.

Hydraulik.

Fünfter Abschnitt.

Aerostatik.

Sechster Abschnitt.

Aerodynamik.

Anhang.

Seite

Einleitung.

§. 1.

Raum im Allgemeinen ist allseitig unbegrenzte Ausdehnung. Ein nach allen Seiten begrenzter Theil des Raumes heißt ein geometrischer oder mathematischer Körper.

Das Undurchdringliche im Raume, das was den Raum erfüllt, nennt man Materie. Ein nach allen Richtungen begrenzter Theil der Materie heißt ein materieller, physischer Körper, oder schlechthin Körper. Die Menge der Materie eines Körpers heißt seine Masse, der Raum, den er einnimmt, sein Volumen.

Einen Körper, dessen Dimensionen sämmtlich unendlich klein sind, nennt man einen materiellen Punkt.

§. 2.

Beharrt ein Körper an demselben Orte, so sagt man, er sei in Ruhe, verläßt er denselben, so sagt man, er sei in Bewegung.

Die Stelle des unendlichen Weltraums, die ein Körper einnimmt, heißt sein absoluter Ort; die, welche er im Vergleich mit den Oertern anderer Körper einnimmt, sein relativer Ort.

Aenderung des absoluten Ortes ist absolute Bewegung, des relativen Ortes relative Bewegung.

Alle Ruhe, alle Bewegung, welche wir auf der Erde beobachten, ist relativ, nicht absolut, weil alle Körper auf derselben sich mit ihr bewegen.

§. 3.

Ruhe und Bewegung sind direct einander entgegengesetzte Begriffe und ein Körper kann den einen Zustand nicht anders aufgeben, als indem er unmittelbar in den andern übergeht. Es haben aber alle Körper das Bestreben, den Zustand der Ruhe oder Bewegung, in dem sie sich befinden, beizubehalten oder in demselben zu beharren. Diese Eigenschaft der Materie ist

eine durch die Erfahrung bestätigte Thatsache und heißt Trägheit oder Beharrungsvermögen.

§. 4.

In dem Wesen der Materie liegt es nun, daß ein Körper nie freiwillig von selbst seinen Zustand der Ruhe oder Bewegung ändert. Soll daher ein Körper aus einem Zustand in den andern übergehen, oder soll sein Zustand modificirt werden, so muß immer eine Ursache vorhanden sein, welche diese Zustandsveränderung bedingt. Diese Ursache der Zustandsveränderungen der Körper nennen wir Kraft.

Die Kräfte werden hier nur nach ihren Wirkungen beurtheilt. Je nach den Wirkungen hat man: anziehende, abstoßende, bewegende, beschleunigende u. s. w. Kräfte. Nach der Gattung eingetheilt, hat man: Muskelkräfte, Wasserkräfte, Dampfkräfte u. s. f.

§. 5.

Bei Bestimmung einer Kraft, welche auf einen Körper wirkt, hat man hauptsächlich drei Elemente zu berücksichtigen:

1) Den Angriffspunkt der Kraft oder denjenigen Punkt, in welchem die Einwirkung unmittelbar geschieht.

2) Die Richtung, d. h. die gerade Linie, nach welcher der Angriffspunkt sich bewegt oder bewegen würde, wenn er der Wirkung der Kraft frei folgen könnte.

3) Die Intensität oder Größe der Kraft, d. h. die Stärke, mit welcher sie auf den Körper wirkt.

Um die Intensität einer Kraft zu bestimmen, vergleicht man sie mit einer als Einheit angenommenen Kraft, und es wird hiebei gewöhnlich die Gewichtseinheit zu Grunde gelegt, und somit können alle Kräfte mit der Schwerkraft verglichen werden. Die Größe einer Kraft wird auch oft durch eine gerade Linie anschaulich gemacht. Man nimmt hiebei eine gewisse Länge als die Gewichtseinheit repräsentirend an, und trägt diese vom Angriffspunkt an auf der Richtungslinie so vielmal ab, als die Kraft selbst Gewichtseinheiten enthält. Die Kräfte so dargestellt, verhalten sich dann wie diese geraden Linien oder wie die absoluten Zahlen der repräsentirten Gewichtseinheiten.

§. 6.

Wenn auf einen beweglichen Körper mehrere Kräfte gleichzeitig so wirken, daß sie in dem Zustande der Ruhe oder Bewegung desselben keine Aenderung hervorbringen, so sagt man die Kräfte seien mit einander im Gleichgewicht. Das Gleichgewicht besteht also darin, daß die Wirkungen der Kräfte sich gegenseitig aufheben oder vernichten. Sind demnach Kräfte im Gleichgewicht, so kann man sie weglassen, ohne daß dadurch der Zustand des Körpers, worauf sie wirken, geändert wird; ebenso kann man andere Kräfte, die im Gleichgewicht sind, darauf wirken lassen, ohne eine Aenderung des Zustandes zu bewirken.

§. 7.

Befindet sich nun ein Körper unter der Einwirkung von mehreren Kräften im Gleichgewicht, so wird dasselbe gestört oder aufgehoben werden, wenn man eine dieser Kräfte wegnimmt, ohne an den andern etwas zu ändern. Man kann also jede einzelne dieser Kräfte als den andern das Gleichgewicht haltend betrachten. Eine solche Kraft, welche mehreren Kräften das Gleichgewicht hält, heißt die entgegengesetzte Mittlere dieser Kräfte.

Sind Kräfte, welche auf einen Körper oder auf einen materiellen Punkt wirken, nicht im Gleichgewicht, so werden sie denselben nach einer bestimmten Richtung fortbewegen oder fortzubewegen streben. Man kann sich aber eine einzige Kraft denken, die ihn grade so bewegen würde wie jene zusammen. Eine solche Kraft heißt die Mittelkraft, Mittlere, Resultante jener Kräfte.

Die Mittelkraft ist also diejenige Kraft, welche die Wirkung mehrerer andern Kräfte ersetzt. Die Kräfte, von welchen diese die Mittelkraft ist, heißen die Seitenkräfte derselben.

Die Bestimmung der Mittelkraft aus den Seitenkräften heißt man die Zusammensetzung der Kräfte. Das Verfahren, zu einer Kraft die Seitenkräfte zu finden, nennt man die Zerlegung der Kräfte.

§. 8.

Die Wissenschaft, welche von den Wirkungen der Kräfte auf die Körper und den dabei stattfindenden Gesetzen handelt, heißt im Allgemeinen Mechanik. Sie zerfällt wieder, je nachdem die Kräfte mit einander im Gleichgewicht sind oder nicht, in die beiden Hauptabtheilungen Statik und Mechanik im engern Sinne, oder Dynamik. Statik ist die Lehre vom Gleichgewicht der Körper. Dynamik ist die Lehre von der Bewegung der Körper.

Die Art, wie die Theile eines Körpers zusammenhängen, nennt man seinen Aggregatszustand. In dieser Beziehung werden die Körper gewöhnlich eingetheilt in feste, tropfbar-flüssige und elastisch-flüssige.

Es zerfällt demnach jede der beiden Hauptabtheilungen, Statik und Dynamik, in drei Unterabtheilungen, und somit erhält man folgende Eintheilung der mechanischen Wissenschaften:

I. Statik.

1) Statik fester Körper (Geostatik) d. i. die Lehre vom Gleichgewicht fester Körper.

2) Statik tropfbar-flüssiger Körper (Hydrostatik) d. i. die Lehre vom Gleichgewicht tropfbar-flüssiger Körper.

3) Statik elastisch-flüssiger Körper (Aërostatik) d. i. die Lehre vom Gleichgewicht elastisch-flüssiger Körper.

II. Dynamik.

1) Dynamik fester Körper (Geodynamik) d. i. die Lehre von der Bewegung fester Körper.

2) Hydraulik d. i. die Lehre von der Bewegung tropfbar-flüssiger Körper.

3) Aërodynamik (Pneumatik) d. i. die Lehre von der Bewegung elastisch-flüssiger Körper.

Erster Abschnitt.

Statik fester Körper.

Erstes Kapitel.

Von der Zusammensetzung, Zerlegung und dem Gleichgewichte der Kräfte überhaupt.

Von den Kräften, deren Richtungslinien in eine gerade Linie zusammenfallen.

§. 9.

Wirken zwei gleiche Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen auf einen Punkt, so heben sie sich gegenseitig auf und sind im Gleichgewicht. Denn es ist kein Grund denkbar, warum der Punkt der einen oder der andern Kraftrichtung folgen sollte.

§. 10.

Wenn auf einen Punkt A, Fig. 1, zwei ungleiche Kräfte P und Q nach entgegengesetzten Richtungen wirken, so ist ihre Mittlere gleich ihrer Differenz und wirkt auf die Seite der größern Seitenkraft. Ist $P > Q$, so kann man P zerlegen in zwei Kräfte, wovon eine gleich Q, die andere gleich q ist. Man hat dann $P = Q + q$. Nun heben sich aber die beiden gleichen entgegengesetzt wirkenden Kräfte Q auf und es bleibt noch q allein übrig, welches sofort die Mittlere von P und Q ist. Es ist aber $q = P - Q$. Bezeichnen wir die Mittlere mit R, so ist $R = q$, also

$$R = P - Q.$$

Beispiel 1. Auf einen Punkt wirken die Kräfte $P = 165$ Pfd., $Q = 132$ Pfd. entgegengesetzt. Ihre Mittlere ist sofort $R = 165 - 132 = 33$ Pfd. und wirkt nach der Richtung der Kraft P.

Beispiel 2. Auf einen Punkt wirken die Kräfte $P = 70$ Pfd. und $Q = 96$ Pfd. entgegengesetzt. Ihre Mittlere ist: $R = 70 - 96 = -26$ Pfd., und wirkt nach der Richtung der Kraft Q, was durch das Zeichen minus angedeutet wird, da die Richtung der Kraft P als positiv vorausgesetzt ist.

§. 11.

Die Wirkung einer Kraft bleibt ungeändert, in welchem Punkt ihrer Richtungslinie man sie auch angreifen läßt, wenn sämmtliche Punkte der Linie fest mit einander verbunden sind. Wirken demnach mehrere Kräfte nach derselben Richtung an verschiedenen Angriffspunkten, so kann man sie sämmtlich an einem Punkte wirken lassen.

§. 12.

Wirken mehrere gleiche Kräfte an einem Punkte nach gleicher Richtung und bringt man eine Kraft an diesem Punkte nach entgegengesetzter Richtung an, welche jene im Gleichgewicht hält, so ist sie die entgegengesetzte Mittlere und muß das n fache einer jeden der gleichen Kräfte sein. Es ist sofort auch die Mittlere das n fache einer jeden derselben. Ist daher P eine der Kräfte, so ist die Mittlere

$$R = nP.$$

§. 13.

Wirken auf einen Punkt zwei ungleiche Kräfte nach gleicher Richtung, so ist die Mittlere gleich ihrer Summe. Denn sind P und Q diese Kräfte, ist p ihr gemeinschaftliches Maß und $Q = nP$, $P = mp$, so wirken an dem Punkte $(m+n)$ gleiche Kräfte, deren Mittlere $R = (m+n)\,p$ ist. Also hat man $R = mp + np$ oder

$$R = P + Q.$$

§. 14.

Wenn auf einen Punkt beliebig viele Kräfte P', P'', P''' ... nach gleicher Richtung wirken, so ist ihre Mittlere gleich ihrer Summe. Denn setzt man zuerst die zwei ersten dieser Kräfte in eine Mittelkraft nach vorigem §. zusammen, sodann die gefundene Mittelkraft dieser mit der dritten Kraft u. s. f., dann erhält man:

$$R = P' + P'' + P''' + \dots$$

Bezeichnet man die Summe gleichartiger Größen mit Σ, oder setzt $P' + P'' + P''' \dots = \Sigma P$, so erhält man den Ausdruck:

$$R = \Sigma P.$$

Beispiel. An einem Seile ziehen nach derselben Richtung die Kräfte 25 Pfd., 30 Pfd., 40 Pfd. + 45 Pfd. Ihre Mittlere ist also

$$R = \Sigma P = 25 + 30 + 40 + 45 = 140 \text{ Pfd.}$$

§. 15.

Wirken auf einen Punkt A, Fig. 2, mehrere Kräfte zum Theil entgegengesetzt, so ist ihre Mittlere gleich der Summe der auf die eine Seite wirkenden weniger der Summe der auf die andere Seite wirkenden, oder gleich der algebraischen Summe sämmtlicher Kräfte und sie wirkt auf die Seite der größern Summe. Denn sind P', P'', P''' ... die nach der einen Seite wirkenden, Q', Q'', Q''' ... die nach der andern Seite, P die Mittlere jener, Q die Mittlere dieser, R die

Mittlere sämmtlicher Kräfte, so ist $R = P - Q$. Es ist aber $P = \Sigma P$, $Q = \Sigma Q$, daher

$$R = \Sigma P - \Sigma Q.$$

Beispiel. Auf einen Punkt wirken nach der einen Richtung die Kräfte: $P' = 45$ Pfd., $P'' = 40$ Pfd., $P''' = 46$ Pfd., $P^{IV} = 50$ Pfd., und nach der entgegengesetzten Richtung die Kräfte: $Q' = 36$ Pfd., $Q'' = 48$ Pfd., $Q''' = 50$ Pfd., $Q^{IV} = 60$ Pfd. Man soll ihre Mittlere bestimmen. Substituirt man die gegebenen Werthe in obige Gleichung, so erhält man:

$$R = (45 + 40 + 46 + 50) - (36 + 48 + 50 + 60) = 181 - 194 = -13 \text{ Pfd.}$$

Demnach ist die Mittlere 13 Pfd. und wirkt nach der Seite der Q.

Wenn die Summe der auf die eine Seite wirkenden Kräfte gleich ist der auf die andere Seite wirkenden, so heben sie sich gegenseitig auf und es findet Gleichgewicht statt, oder es ist $R = 0$.

Von zwei Kräften, die auf einen Punkt unter einem beliebigen Winkel wirken.

§. 16.

Wenn zwei Kräfte P und Q unter einem Winkel auf einen beweglichen Punkt A, Fig. 3, wirken, so kann kein Gleichgewicht stattfinden.

Denn nehmen wir an die Kräfte P und Q seien im Gleichgewicht, so kann man an dem Punkt A eine Kraft P′ anbringen, welche P gleich und entgegengesetzt ist. Diese Kraft würde aber wegen des Gleichgewichts von P und Q ihre ganze Wirkung äußern und den Punkt A in der Richtung von A nach P′ bewegen; da sich aber P und P′ aufheben müssen, weil sie gleich und entgegengesetzt sind, so würde auch folgen, daß Q so wirken würde, als ob sie allein wäre und somit den Punkt A zugleich von A nach Q bewegen. Es ist aber unmöglich, daß der Punkt zugleich nach beiden Richtungen sich fortbewege; folglich kann zwischen P und Q kein Gleichgewicht bestehen.

§. 17.

Die Richtung der Mittelkraft zweier Kräfte, die auf einen Punkt unter einem Winkel wirken, muß jedenfalls durch den gemeinschaftlichen Angriffspunkt gehen, weil dieser Punkt in der Richtung liegen muß, nach welcher er sich bewegen würde, wenn er der Wirkung der Kräfte folgen könnte.

Die Richtung der Mittelkraft muß ferner in derselben Ebene mit den Richtungslinien der Seitenkräfte liegen, denn es ist kein Grund für die gegentheilige Annahme denkbar.

Sie muß ebenso in dem Winkel liegen, den die Richtungen der Seitenkräfte mit einander bilden; weil jede Kraft das Bestreben hat den Angriffspunkt aus der Richtung der andern nach der ihrigen, also in den Winkel, abzulenken.

§. 18.

Wenn die beiden Seitenkräfte gleich sind, so halbirt die Richtung

der Mittelkraft den Winkel der beiden Seitenkräfte; denn der Angriffspunkt wird von jeder Kraft gleich stark von der Richtung der andern abgelenkt.

Sind die Kräfte ungleich, so bildet die Richtung der Mittelkraft mit der größern Seitenkraft den kleinern Winkel.

Es seien P und Q zwei auf den Punkt A, Fig. 4, wirkende gleiche Kräfte, so wird ihre Mittelkraft R den Winkel PAQ halbiren. Läßt man nun die Kraft P um p wachsen, so haben P und p eine Mittlere R′, deren Richtung in dem Winkel RAP liegen muß. Der Winkel R′AP ist nun offenbar kleiner als $\sphericalangle$ RAP = $\sphericalangle$ QAR, also um so mehr kleiner als $\sphericalangle$ R′AQ. Es ist aber R′ die Mittlere von den Kräften $P + p$ und Q; wobei, da $P = Q$ vorausgesetzt wurde, $P + p > Q$ ist. Es folgt also, daß der größern Seitenkraft der kleinere Winkel anliegt.

§. 19.

Parallelogramm der Kräfte. Wirken zwei Kräfte unter einem beliebigen Winkel auf einen Punkt und schneidet man von diesem Punkte an auf den Richtungen derselben Stücke ab, welche den Kräften gleich oder proportional sind, construirt sodann ein Parallelogramm aus diesen Linien und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel, so bestimmt die aus dem Angriffspunkt gezogene Diagonale dieses Parallelogramms die Richtung und Größe der Mittelkraft der beiden gegebenen Kräfte.

Das so construirte Parallelogramm heißt man das Parallelogramm der Kräfte und den ausgesprochenen Satz: den Satz vom Parallelogramm der Kräfte.

Sind demnach, Fig. 5, AB = P und AC = Q die beiden Seitenkräfte, so ist die Diagonale AD = R die Mittelkraft und ABDC das Parallelogramm der Kräfte.

Wir wollen nun zuerst beweisen, daß die Diagonale des Parallelogramms die Richtung der Mittelkraft angibt. Zu dem Ende nehmen wir an, daß auf den Punkt A, Fig. 6, unter dem beliebigen Winkel BAC zwei gleiche Kräfte nach den Richtungen AK, AC wirken, welche durch die Linien AB und AC gegeben seien. Vollendet man das Parallelogramm ABDC, so halbirt die Diagonale AD den Winkel BAC und wird folglich die Richtung der Mittelkraft von AB und AC angeben. Diese Kraft können wir aber in jedem Punkt ihrer Richtungslinie angreifend denken, folglich auch im Punkte D. Lassen wir nun in der Richtung AK eine weitere Kraft BF = AB = AC wirken, so werden diese drei Kräfte dieselbe Mittlere haben wie die zwei Kräfte, wovon die eine nach DE wirkt (die Mittlere von AB und BC) und BF. Zerlegen wir die nach DE wirkende Kraft in ihre ursprünglichen Seitenkräfte nach DH und DG, so wird dadurch die Mittlere sämmtlicher Kräfte nicht geändert. Die in der Richtung DH wirkende Kraft können wir aber in B angreifen lassen. Diese Kraft ist gleich

BD = AC = BF. Construirt man nun das Parallelogramm DBFG, so wird die Diagonale BG die Richtung der Mittlern der beiden gleichen Kräfte BF und BD angeben. Diese nach BF wirkende Mittlere können wir nun an G wirksam denken und sie da in ihre Seitenkräfte nach GN und GL zerlegen, wodurch die Mittlere sämmtlicher Kräfte nicht geändert wird. Die Seitenkraft DG lassen wir nun an dem Punkte G nach L wirken, was auf die Mittlere keinen Einfluß hat. An dem Punkte G wirken also die drei Kräfte nämlich FG nach E und DG, GL nach M, ihre Mittlere muß demnach durch den Punkt G gehen. Diese drei Kräfte sind aber die anfänglich gegebenen Kräfte AC, AB, BF. Da nun die Mittlere dieser Kräfte durch die Punkte A und G geht, so folgt, daß die Diagonale AG des Parallelogramms AFGC die Richtung der Mittelkraft angibt. Die Diagonale gibt also die Richtung der Mittlern an, wenn die Seiten das Verhältniß AC : AF = 1 : 2 haben. Setzt man nach und nach immer wieder in der Richtung AK gleiche Kräfte zu, so läßt sich auf obige Art zeigen, daß der Satz richtig ist, wenn die Seiten das Verhältniß 1 : 3, 1 : 4, überhaupt 1 : n haben.

Es sei nun ferner, Fig. 7, AB = n, AC = CE = EG... = 1, so ist in dem Parallelogramm ABDC die Diagonale AD die Richtung der Mittelkraft von den Kräften AC und AD, weil sich verhält AC : AD = 1 : n. Zerlegt man dieselbe an dem Punkte D in ihre Seitenkräfte nach K und F, construirt das Parallelogramm CEFD, läßt die Seitenkraft DK an C wirken, so wird in der Mittlern von AB, AC, CE nichts geändert. Die Mittlere von CE und CD geht nun nach der Diagonale CF, da sich verhält CE : CD = 1 : n. An F zerlege man diese noch in ihre Seitenkräfte nach L und H. Es wirken also an diesem Punkte F die Kräfte EF = AB nach L, BD, DF gleich AC und CE nach H. Die Mittlere dieser geht also durch F und A, folglich in der Richtung der Diagonale AF des Parallelogramms ABFE, dessen Seiten sich verhalten wie AE : AB = 2 : n. Auf diese Weise fortfahrend, läßt sich nun beweisen, daß der Satz richtig ist für das Verhältniß der Seiten m : n. Ist die Krafteinheit q und die eine Kraft P = nq, die andere Q = mq, so hat man: P : Q = n q : m q = n : m.

Wenn demnach die beiden Seitenkräfte commensurabel sind, so ist der Satz richtig. Er ist aber auch richtig, wenn sie incommensurabel sind. Um dieß noch nachzuweisen, sei Fig. 8 AB = P und AC = Q. Ist die Diagonale AD nicht die Richtung der Mittlern von P und Q, so muß irgend eine andere Linie AE, welche die CD in F schneidet, dieselbe angeben. Zwischen E und D läßt sich aber jedenfalls ein Punkt F der Art finden, daß die Linien CF = AG und AC ein gemeinschaftliches Maß haben. Wird AG als Kraft betrachtet, so ist AF jedenfalls die Richtung der Mittleren der beiden Kräfte AG und AC. Nun ist aber $\sphericalangle$ FAB $<$ $\sphericalangle$ EAB und AG $<$ AB. Die kleinere Kraft würde also mit der Mittleren einen kleinern Winkel bilden wie die größere, was nach §. 18 unmöglich ist, folglich kann AE nicht die Richtung von P und Q sein. Ebenso wird bewiesen, daß ihre

Richtung nicht zwischen B und D fallen kann, sie muß folglich mit der Diagonale AD zusammenfallen.

§. 20.

Es ist nun noch zu beweisen, daß die Diagonale auch die Größe der Mittelkraft bestimmt. In Fig. 9 sei $AB = P$, $AC = Q$. Verzeichnet man das Parallelogramm ABDC, so ist AD die Richtung der Mittelkraft R. Denkt man sich nun an A die entgegengesetzte Mittlere angebracht, so muß diese absolut gleich R sein, aber entgegengesetzt von A nach F in der Verlängerung von DA wirken. Diese muß daher mit P und Q das Gleichgewicht herstellen. Von den drei Kräften kann man aber jede als die entgegengesetzte Mittlere der beiden andern ansehen. Betrachtet man Q als die entgegengesetzte Mittlere der beiden nach AB und AF wirkenden Kräfte und läßt sie in entgegengesetzter Richtung nach AE wirken, so ist letztere die Mittlere jener beiden. Macht man daher $AE = AC = Q$ und zieht BE, so muß letztere Linie parallel sein mit AD und AF. Zieht man EF parallel zu AB, so erhält man ein Parallelogramm ABEF, worin AE die Mittlere der zwei Kräfte AB und AF oder P und R vorstellt. Ferner ist $AD = EB$ und $EB = AF$, folglich auch $AD = AF$, oder $AD = R$. Demnach ist durch die Diagonale auch die Größe der Mittelkraft bestimmt.

§. 21.

Durch Anwendung des Parallelogramms der Kräfte läßt sich nun zu zwei Seitenkräften die Mittelkraft construiren. Ebenso läßt sich eine Mittelkraft in zwei Seitenkräfte nach gegebenen Richtungen durch Construction zerlegen.

Die dahin einschlagenden Aufgaben lassen sich aber auch, und zwar genauer, durch Rechnung lösen. Es sollen daher die betreffenden Relationen nun hergeleitet werden:

In Fig. 10 sei $AB = P$ die eine Seitenkraft, $AC = Q$ die andere, $\sphericalangle BAC = \delta$ der Winkel, welchen ihre Richtungen mit einander bilden. Vollendet man das Parallelogramm ABDC, so sei die Diagonale $AD = R$ die Mittelkraft, α und β die Winkel, welche die Mittlere mit den Seitenkräften P und Q bildet. Winkel α ist für P der anliegende und β der gegenüberliegende Winkel, ebenso ist für Q β der anliegende und α der gegenüberliegende Winkel.

Betrachtet man $\triangle$ ABD, so hat man nach einem trigonometrischen Satze:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 . AB . BD . \cos ABD.$$

Nun ist aber $AD = R$, $AB = P$, $BC = AC = Q$, $\cos ABD = - \cos BAC = - \cos \delta$. Substituirt man diese Werthe in obige Gleichung, so erhält man:

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2P . Q . \cos \delta \quad . \; . \; . \; 1$$

hieraus folgt der Satz für die Zusammensetzung der Kräfte:

Das Quadrat der Mittelkraft ist gleich der Summe

der Quadrate der Seitenkräfte mehr dem doppelten Producte der beiden Seitenkräfte in den Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Ferner verhält sich:

$$AB:BD = \sin ADB : \sin BAD$$
$$AB:AD = \sin ADB : \sin ABD$$
$$BD:AD = \sin BAD : \sin ABD$$

oder

$$P:Q = \sin\beta : \sin\alpha$$
$$P:R = \sin\beta : \sin\delta$$
$$Q:R = \sin\alpha : \sin\delta$$

und hieraus:

$$P\sin\alpha = Q\sin\beta \; . \; . \; . \; 2$$

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{R.\sin\beta}{\sin\delta} \\ Q &= \frac{R\;\sin\alpha}{\sin\delta} \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; 3.$$

Aus Gleichung 3 folgt der Satz für die Zerlegung einer Mittelkraft in Seitenkräfte: Eine Seitenkraft ist gleich der Mittelkraft mal dem Sinus des gegenüberliegenden Winkels, dividirt durch den Sinus des ganzen Winkels.

Zur Bestimmung der Richtungswinkel erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{Q.\sin\delta}{R} \\ \sin\beta &= \frac{P.\sin\delta}{R} \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; 4.$$

Die Mittelkraft kann auch noch auf folgende Weise bestimmt werden: Man fälle auf AD das Perpendikel BF, so ist AD = AF + FD. Nun ist AD = R, AF = P. cos α, FD = Q cos β, also

$$R = P\cos\alpha + Q\cos\beta \; . \; . \; . \; 5.$$

§. 22.

Wenn die Seitenkräfte einander gleich sind, so wird das Parallelogramm Fig. 11 eine Raute und es ist $\sphericalangle\, \beta = \sphericalangle\, \alpha$, $\delta = 2\alpha$, also $R = \frac{P\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{P.2.\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}$ oder:

$$R = 2P.\cos\alpha \; . \; . \; . \; 1$$

d. h. die Mittelkraft zweier gleichen Seitenkräfte ist gleich dem doppelten Producte aus der Seitenkraft in den Cosinus des anliegenden Winkels.

Dieser Satz ergibt sich auch leicht wie folgt: Ist AB = AC = P, so wird AD = R durch BC in E rechtwinkelig halbirt, also AD = AE + ED = 2 AE, somit R = 2 P cos α.

Aus Gleichung 1 folgt auch

$$P = \frac{R}{2\cos\alpha} \; . \; . \; . \; 2$$

d. h. eine Seitenkraft ist gleich der Mittelkraft dividirt durch den doppelten Cosinus des anliegenden Winkels.

§. 23.

Wirken beide Kräfte P und Q unter einem rechten Winkel auf den Punkt A, Fig. 12, so ist $\delta = 90^0$, also $\cos \delta = 0$, demnach erhält man $R^2 = P^2 + Q^2 + 2P.Q.0$, oder:

$$R^2 = P^2 + Q^2 \ . \ . \ . \ 1.$$

Hieraus folgt für die Zusammensetzung zweier rechtwinkeligen Seitenkräfte: Das Quadrat der Mittelkraft ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Seitenkräfte.

Ferner wird $\sin \alpha = \cos \beta$, $\cos \alpha = \sin \beta$, $\sin \delta = 1$, somit

$$\left.\begin{array}{l} P = R \cos \alpha = R \sin \beta \\ Q = R \cos \beta = R \sin \alpha \end{array}\right\} \ . \ . \ . \ 2.$$

Für die Zerlegung einer Mittelkraft in rechtwinkelige Seitenkräfte folgt also: Eine Seitenkraft ist gleich der Mittelkraft mal dem Cosinus des anliegenden Winkels, oder gleich der Mittelkraft mal dem Sinus des gegenüberliegenden Winkels.

Zur Bestimmung der Richtungswinkel ergibt sich:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tang}\ \alpha = \dfrac{Q}{P} \\[2ex] \text{tang}\ \beta = \dfrac{P}{Q} \end{array}\right\} \ . \ . \ . \ 3$$

d. h. die Tangente eines Winkels ist gleich der gegenüberliegenden Seitenkraft dividirt durch die anliegende.

Ferner:

$$\left.\begin{array}{l} \sin \alpha = \cos \beta = \dfrac{Q}{R} \\[2ex] \cos \alpha = \sin \beta = \dfrac{P}{R} \end{array}\right\} \ . \ . \ . \ 4$$

d. h. der Sinus eines Winkels ist gleich der gegenüberliegenden Seitenkraft dividirt durch die Mittelkraft; der Cosinus ist gleich der anliegenden Seitenkraft dividirt durch die Mittelkraft.

Wenn $P > Q$, so findet man annäherungsweise und bis $1/_{25}$ genau die Mittelkraft durch die Formel:

$$R = 0{,}96\ P + 0{,}4\ Q \ . \ . \ . \ 5.$$

Die Herleitung dieser Näherungsformel findet man im polytechn. Centralbl. Nr. 67, Jahrg. 1840, von Weisbach.

§. 24.

Beispiele über das Parallelogramm der Kräfte.

1) Auf einen Punkt A, Fig. 12, wirken die zwei Kräfte P = 48 Pfd., Q = 30 Pfd. unter einem rechten Winkel. Man soll Größe und Richtung der Mittelkraft bestimmen?

Aufl. Mit Bezug auf die bisherige Bezeichnung ist nach vorigem §. Gl. 1 $R = \sqrt{48^2 + 30^2} = \sqrt{3204} = 56{,}6$ Pfd. Nach Gl. 3 ist $\operatorname{tang} \alpha = \frac{Q}{P} = \frac{30}{48}$; $\alpha = 32^0\ 0'\ 19''$; $\beta = 57^0\ 59'\ 41''$.

2) Auf einer festen horizontalen Ebene MN, Fig. 13, liegt ein Körper, dessen Gewicht $G = 300$ Kilg. beträgt. Am Schwerpunkt A desselben wirkt eine Kraft $R = 150$ Kilgr., welche mit der horizontalen einen Winkel $DAB = \alpha = 36^0$ bildet. Welchen Verticaldruck erleidet die Ebene und mit welcher Kraft wird der Körper horizontal fortbewegt?

Aufl. Ist $AD = R$, so construire man das Parallelogramm der Kräfte ABDC, so ist $AB = P$ die horizontale Seitenkraft, $AC = Q$ die verticale, welch letztere den Körper zu heben sucht. Nun ist $Q = R \sin \alpha = 150 . \sin 36^0 = 88{,}1678$ Kilgr., daher der Normaldruck, den die Ebene während der Wirkung der Kraft erleidet $G - Q = 300 - 88{,}1678 = 211{,}8322$ Kilgr. Der horizontale Zug ist $P = R \cos \alpha = 150 . \cos 36^0 = 121{,}35$ Kilgr.

3) In der Richtung FA wirke in Punkt A der festen Ebene MN, Fig. 14, eine Kraft $R = 125$ Kilgr. unter einem Winkel $\alpha = 38^0\ 15'$. Man soll den Horizontalschub und Verticaldruck bestimmen?

Aufl. Es sei $AD = R$. Man zerlege diese Kraft durch Construction des Parallelogramms ABDC in eine verticale und eine horizontale Seitenkraft. Erstere ist $AC = R . \sin \alpha = 125 . \sin 38^0\ 15' = 77{,}386$ Kilgr. der Verticaldruck. Letztere ist $AB = R \cos \alpha = 125 \cos 38^0\ 15' = 98{,}164$ Kilgr. der Horizontalschub.

4) Zwei Kräfte $P = 40$ Kilgr., $Q = 30$ Kilgr. wirken auf einen Punkt A Fig. 10, und schließen einen Winkel $\delta = 40^0$ mit einander ein. Man soll Größe und Richtung ihrer Mittelkraft bestimmen?

Aufl. Nach §. 21 Gl. 1 ist $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2 . PQ . \cos \delta} = \sqrt{40^2 + 30^2 + 2 . 40 . 30 . \cos 40^0}$, $R = 65{,}868$ Kilogr. Nach Gl. 4 ist $\sin \alpha = \frac{Q . \sin \delta}{R} = \frac{30 . \sin 40^0}{65{,}868}$; $\alpha = 17^0\ 1'\ 24''$; $\beta = 22^0\ 58'\ 36''$.

5) Ein Seil ADBC, Fig. 15, ist mit dem einen Ende A an einem in der verticalen Wand MN befindlichen Knoten befestigt, und dann über eine feste Rolle B geschlungen. In D trägt es mittelst eines beweglichen Ringes ein Gewicht Q. Man soll die am Ende C für das Gleichgewicht nöthige Kraft P, sowie den horizontalen und verticalen Zug im Punkte A bestimmen?

Aufl. Im Zustande des Gleichgewichts bilde das Seilstück AE mit der verticalen MN den Winkel α. Die Intensität der Kraft Q, welche vertical wirkt und im Gleichgewichtszustande mit den Seilstücken DA und DB gleiche Winkel bildet, sei $DJ = Q$. Construirt man das Parallelogramm der Kräfte DFJE, so ist DF die Spannung des Seiles DB, und DE die von DA. Da nun $\sphericalangle\ JDF = \sphericalangle\ JDE = \alpha$, ist

nach §. 22, Gl. 2 $DF = \frac{Q}{2 \cos \alpha}$. Nun muß aber die Spannung BC gleich der von BD sein, daher $P = \frac{Q}{2 \cos \alpha} \ldots 1$. Ebenso ist $DE = \frac{Q}{2 \cos \alpha}$. Macht man $AG = DE$ und zerlegt diese Kraft in zwei rechtwinkelige Seitenkräfte, so erhält man den horizontalen Zug $AH = AG . \sin \alpha = \frac{Q}{2 \cos \alpha} . \sin \alpha = \frac{Q}{2} . \tang \alpha \ldots 2$; und den verticalen $AV = AG . \cos \alpha = \frac{Q}{2 \cos \alpha} . \cos \alpha = \frac{Q}{2} \ldots 3$. Nach dem Ausdruck 3 ist der verticale Zug in A unabhängig vom Winkel α, also stets gleich der Hälfte von Q. Der horizontale Zug Gl. 2 wächst und nimmt ab mit der Tangente von α, er kann 0 und unendlich groß werden. Die Kraft P Gl. 1 hängt gleichfalls vom Winkel α ab, sie ist für $\alpha = 0$, $P = \frac{Q}{2}$, für $\alpha = 90$, $P = \infty$.

6) Zwei im Punkte C, Fig. 16, durch ein Gelenk miteinander verbundene unbiegsame Stäbe AC und BC seien in den Punkten A und B gestützt. Der Punkt A sei unbeweglich, B mit dem Verticalstück BG verbunden, welches sich auf den bewegbaren Körper MN stützt. Im Punkte C wirke normal gegen AC und in der Ebene der Stäbe die Kraft P. Man soll die Horizontal- und Verticalpressungen in den Punkten A und B bestimmen?

Aufl. Man nehme in der Richtung von P die Linie $CE = P$ an und construire das Parallelogramm CDEF, so stellt CF diejenige Seitenkraft von P vor, welche in der Richtung des Stabes BC nach S, und CD diejenige, welche in der Richtung des Stabes CA nach T wirkt. Setzt man nun $\sphericalangle BCJ = \alpha$ und $\sphericalangle ABC = \beta$, so ist $FC = \frac{P}{\sin \alpha}$ $DC = \frac{P}{\cos \alpha}$. Man lasse nun die Kraft FC an B wirken und zerlege sie da in zwei rechtwinkelige Seitenkräfte, so erhält man die Horizontalpressung in B:

$$H = FC . \sin \beta = \frac{P . \sin \beta}{\sin \alpha}$$

und die Verticalpressung:

$$V = FC \cos \beta = \frac{P . \cos \beta}{\sin \alpha}.$$

Ferner lasse man DC an A wirken und zerlege sie daselbst, so ergibt sich in diesem Punkte die Horizontalpressung:

$$H' = DC . \sin (\alpha - \beta) = \frac{P \sin (\alpha - \beta)}{\cos \alpha}$$

und die Verticalpressung:

$$V' = DC . \cos (\alpha - \beta) = \frac{P \cos (\alpha - \beta)}{\cos \alpha}.$$

Von mehreren Kräften, welche auf einen Punkt nach verschiedenen Richtungen in einer Ebene wirken.

§. 25.

Bestimmung der Mittelkraft durch Construction. Wirken mehrere Kräfte P', P'', P''', P^{IV} ... auf einen Punkt A, Fig. 17, so läßt sich Größe und Richtung der Mittelkraft durch wiederholte Anwendung des Parallelogramms der Kräfte bestimmen. Man trage nämlich vom Angriffspunkte A aus auf den Richtungslinien der Kräfte ihre Intensitäten $P' = AB$, $P'' = AC$, $P''' = AD$ ... ab. Setze nun P' mit P'' mittelst des Parallelogramms $ABR'C$ zusammen, so wird die Diagonale AR' die mittlere dieser beiden Kräfte darstellen; alsdann setze man AR' mit P'' zusammen und man wird ihre Mittlere AR'' erhalten. Fährt man auf diese Weise mit der Zusammensetzung fort, so erhält man AR''', welche die Größe und Richtung der Mittlern sämmtlicher Seitenkräfte angibt.

§. 26.

Bestimmung der Mittelkraft durch Rechnung. Um die Mittelkraft durch Rechnung zu bestimmen, lege man durch den Angriffspunkt A, Fig. 18, der gegebenen Kräfte P', P'', P''' ... zwei rechtwinkelige Coordinatenaxen XX und YY, bezeichne die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte mit der Axe der x bildet, beziehungsweise durch α', α'', α''' ..., so zwar, daß $\sphericalangle XAB = \alpha'$, $XAC = \alpha''$, $XAD = \alpha'''$ ... ist. Nun zerlege man jede einzelne der gegebenen Kräfte in zwei rechtwinkelige Seitenkräfte, wovon eine in der Richtung der Axe der x, die andere in der Richtung der Axe der y wirkt. So sei z. B. $AB = P'$; wird das Parallelogramm $AX'BY'$ construirt, dann ist AX' die eine, AY' die andere Seitenkraft, und es ist $AX' = P' \cos \alpha'$, $AY' = P' \sin \alpha'$ u. s. f. Es seien nun X', X'', X'''... die Seitenkräfte nach der Axe der x; Y', Y'', Y''' ... die Seitenkräfte nach der Axe der y; X die Mittlere aller nach der ersten Axe wirkenden, Y die Mittlere aller nach der andern Axe wirkenden Seitenkräfte, R die Mittlere des ganzen Systems. Alsdann hat man $X' = P' \cos \alpha'$, $Y' = P' \sin \alpha'$; $X'' = P'' \cos \alpha''$, $Y'' = P'' \sin \alpha''$; $X''' = P''' \cos \alpha'''$, $Y''' = P''' \sin \alpha'''$ u. s. w. Man erhält sodann nach §. 15

$$\left.\begin{array}{l} X = X' + X'' + X''' + \ldots + X^n \\ Y = Y' + Y'' + Y''' + \ldots + Y^n \end{array}\right\} \ldots 1$$

oder:

$$\left.\begin{array}{l} X = P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + P''' \cos \alpha''' + \ldots P^n \cos \alpha^n = \Sigma (P \cos \alpha) \\ Y = P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' + P''' \sin \alpha''' + \ldots P^n \sin \alpha^n = \Sigma (P \sin \alpha) \end{array}\right\} 2$$

das ganze System ist somit reducirt auf zwei rechtwinkelige Kräfte. Nach §. 23, Gl. 1 ergibt sich sofort die Mittelkraft:

$$\left.\begin{array}{l} R = \sqrt{X^2 + Y^2} \text{ oder} \\ R = \sqrt{[\Sigma (P \cos \alpha)^2 + \Sigma (P \sin \alpha)^2]} \end{array}\right\} \ldots 3.$$

Bedeutet a den Winkel, welchen die Richtung der Mittelkraft mit

der Abscissenare bildet, so hat man nach §. 23 zur Bestimmung der Richtung:

$$\left.\begin{aligned} \text{tang a} &= \frac{Y}{X} \\ \sin a &= \frac{Y}{R} \\ \cos a &= \frac{X}{R} \end{aligned}\right\} \quad \ldots 4.$$

Bei der Anwendung der obigen Gleichungen muß man die Richtungen der Seitenkräfte nach den Coordinatenaxen wohl berücksichtigen. Es wird nämlich auf der Abscissenare die Richtung nach rechts als die positive, und die nach links als die negative betrachtet. Auf der Ordinatenare ist aufwärts die positive und abwärts die negative Richtung genommen. In den Gleichungen 1 und 2 ist also die algebraische Summe der betreffenden Seitenkräfte zu verstehen und es müssen diese mit ihren zugehörigen Zeichen dort eingeführt werden. Die Zeichen der Seitenkräfte sind aber sehr leicht zu erkennen, denn sie stimmen genau mit denen der Functionen der Richtungswinkel überein.

Die Zeichen von X und Y bestimmen ebenso die Lage des Winkels a und somit genau die Richtung der Mittelkraft. Sind beide positiv, so ist a ein spitzer Winkel und die Mittlere fällt in den ersten Quadranten, ist X negativ und Y positiv, so fällt R in den zweiten Quadranten u. s. f.

Beispiel. Auf einen Punkt wirken die Kräfte $P' = 50$ Pfd., $P'' = 70$ Pfd., $P''' = 40$ Pfd., und bilden mit der Abscissenare die Winkel $\alpha' = 25^0\ 14'$, $\alpha'' = 75^0\ 18'$, $\alpha''' = 105^0\ 12'$. Man soll Größe und Richtung der Mittelkraft bestimmen?

Aufl. Mit Rücksicht auf die oben angenommene Bezeichnung erhält man: $X' = P'.\cos\alpha' = 50.\cos 25^0\ 14' = 21{,}315$; $Y' = P' \sin\alpha' = 50.\ \sin 25^0\ 14' = 45{,}228$.

Ebenso findet man: $X'' = 17{,}763$; $X''' = -10{,}487$; $Y'' = 67{,}708$; $Y''' = 38{,}600$.

Somit ist

$$X = 45{,}228 + 17{,}763 - 10{,}487, = 52{,}504.$$
$$Y = 21{,}315 + 67{,}708 + 38{,}600 = 127{,}623.$$

also

$$R = \sqrt{52{,}504^2 + 127{,}623^2} = 138.$$

Zur Bestimmung der Richtung von R hat man

$$\text{tang a} = \frac{+Y}{+X} = \frac{127{,}623}{52{,}504} = 67^0\ 38'\ 15''$$

und daraus

$$a = 79^0\ 18'\ 55''.$$

Beispiel 2. Es sei $P' = 50$ Pfd., $P'' = 80$, $P''' = 130$, $P^{IV} = 42$; $\alpha' = 65^0\ 18'$, $\alpha'' = 108^0\ 27'$, $\alpha''' = 135^0\ 48'$, $\alpha^{IV} = 200^0\ 44'$. Man soll Größe und Richtung der Mittelkraft bestimmen?

Aufl. Man findet

$$X = \Sigma P \cos\alpha = 20{,}893 - 25{,}318 - 93{,}198 - 39{,}280 = -136{,}903$$
$$Y = \Sigma P \sin\alpha = 45{,}425 + 75{,}888 + 90{,}631 - 14{,}868 = +197{,}076$$

daher:

$$R = \sqrt{(-136{,}903)^2 + (197{,}076)^2} = 239{,}961$$

$$\operatorname{tang} a = \frac{+Y}{-X} = \frac{197{,}076}{-136{,}903}.$$

Da nun Y positiv, X negativ ist, so fällt die Richtung der Mittlern in den zweiten Quadranten und man findet $a = 124^0\ 47'\ 13''$.

§. 27.

Bedingungen des Gleichgewichts. Es wird nur dann Gleichgewicht stattfinden, wenn $R = 0$ ist, also wenn man hat

$$0 = \sqrt{\Sigma\,(P \cos \alpha)^2 + \Sigma\,(P \sin \alpha)^2},$$

daher

$$0 = \Sigma\,(P \cos \alpha)^2 + \Sigma\,(P \sin \alpha)^2.$$

Diese Bedingungsgleichung kann aber nur dann stattfinden, wenn jedes der beiden Glieder für sich gleich 0 ist. Demnach muß sein:

$$0 = \Sigma\, P \cos \alpha$$
$$0 = \Sigma\, P \sin \alpha$$

d. h. das System befindet sich im Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe der Seitenkräfte nach jeder der beiden Axen gleich Null ist.

Von den Kräften, welche auf einen Punkt im Raume wirken.

§. 28.

Von drei rechtwinkeligen Kräften. Auf den Punkt A, Fig. 19, wirken die drei Kräfte $P = AB$, $Q = AC$, $S = AE$ rechtwinkelig. Um ihre Mittelkraft zu bestimmen, setze man zuerst P mit Q mittelst des Parallelogramms ABDC zusammen, so ist dessen Diagonale AD die Mittlere dieser beiden. Alsdann setze man AD mit $AE = S$ zusammen, indem man das Parallelogramm ADFE construirt, dann ist die Diagonale AF die verlangte Mittelkraft R. Es ist aber $AF^2 = AD^2 + DF^2$ und $AD^2 = AB^2 + AC^2$

also $AF^2 = AB^2 + AC^2 + DF^2$ oder

$$R^2 = P^2 + Q^2 + S^2 \quad \ldots 1$$

d. h. das Quadrat der Mittelkraft ist gleich der Summe der Quadrate der drei Seitenkräfte.

Man sieht, daß AF die Diagonale des Parallelepipeds ist, das aus den drei Seitenkräften AB, AC, AE construirt werden kann. Dieses Parallelepiped heißt man das Parallelepipedon der Kräfte.

Sind die Winkel, welche die Richtung der Mittelkraft mit den Seitenkräften P, Q, S bildet, beziehungsweise α, β, γ, so hat man

$$\left.\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{P}{R} \\ \cos \beta &= \frac{Q}{R} \\ \cos \gamma &= \frac{S}{R} \end{aligned}\right\} \ldots 2.$$

Soll eine Kraft R in drei rechtwinkelige Seitenkräfte P, Q, S zerlegt werden, deren Richtung mit der Richtung dieser die Winkel α, β, γ bildet, so hat man

$$\left.\begin{array}{l} P = R \cos \alpha \\ Q = R \cos \beta \\ S = R \cos \gamma \end{array}\right\} \ldots 1$$

d. h. eine Seitenkraft ist gleich der Mittelkraft mal dem Cosinus des Winkels, den sie mit der Mittlern bildet.

Quadrirt man diese drei Gleichungen und addirt die Quadrate, so erhält man: $P^2 + Q^2 + S^2 = R^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$ oder wegen Gl. 1 des vorigen §.

$$R^2 = R^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$
$$1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \ldots 2.$$

Von den drei Winkeln α, β, γ lassen sich demnach nur zwei beliebig annehmen, der dritte ist durch die Gleichung 2 bedingt.

Beispiel: Man soll die Kraft $R = 900$ Pfd. in drei rechtwinkelige Seitenkräfte zerlegen, wenn $\alpha = 75^0$, $\beta = 80^0$ ist.

Aufl. Durch Gl. 2 findet man $\gamma = 18^0\ 10'$; alsdann nach Gl. 1

$$P = 232{,}401;\ Q = 156{,}283;\ S = 855{,}13.$$

§. 29.

Von einer beliebigen Anzahl Kräfte. Sind Fig. 20 mehrere Kräfte P', P'', P''' ... gegeben, so lege man durch ihren Angriffspunkt A drei rechtwinkelige Coordinatenaxen AX, AY, AZ und bezeichne die Winkel, welche sie mit diesen Axen bilden, beziehungsweise mit α', β', γ'; α'', β'', γ''; α''', β''', γ''' u. s. w. Nun zerlege man jede einzelne Kraft in drei rechtwinkelige Seitenkräfte nach den Richtungen der Axen. Hierdurch erhält man drei Systeme von Kräften, wovon jedes in der Richtung einer Axe wirkt. Die Mittelkräfte der einzelnen Systeme nach den gleichnamigen Axen seien X, Y, Z. Zerlegt man nun die Kraft P' auf angegebene Weise, so sind die Seitenkräfte $P' \cos \alpha'$, $P' \cos \beta'$, $P' \cos \gamma'$. Verfährt man so mit jeder Kraft und wendet dann §. 15 an, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} X = \Sigma\, P \cos \alpha \\ Y = \Sigma\, P \cos \beta \\ Z = \Sigma\, P \cos \gamma \end{array}\right\} \ldots 1.$$

Die Zeichen der einzelnen Seitenkräfte müssen wieder wohl beachtet werden und stimmen immer mit den Zeichen der Functionen überein.

Das ganze System ist demnach reducirt auf drei rechtwinkelige Kräfte, welche sich sofort nach §. 28 in eine Mittelkraft R vereinigen lassen. Man erhält also

$$R^2 = \Sigma\, (P \cos \alpha)^2 + \Sigma\, (P \cos \beta)^2 + \Sigma\, (P \cos \gamma)^2 \ldots 2.$$

Sind a, b, c die Winkel, welche die Mittelkraft mit den Axen AX, AY, AZ bildet, so hat man

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \frac{\Sigma \text{ P} \cos \alpha}{\text{R}} \\ \cos b &= \frac{\Sigma \text{ P} \cos \beta}{\text{R}} \\ \cos c &= \frac{\Sigma \text{ P} \cos \gamma}{\text{R}} \end{aligned}\right\} \ldots 3.$$

Sollen nun die Kräfte im Gleichgewicht sein, so muß wieder $R = 0$ sein, also muß stattfinden:

$$0 = \Sigma\ (\text{P} \cos \alpha)^2 + \Sigma\ (\text{P} \cos \beta)^2 + \Sigma\ (\text{P} \cos \gamma)^2 \ldots 4.$$

Es kann aber diese Bedingungsgleichung nur dann statt haben, wenn jedes einzelne Glied für sich gleich 0 ist; also erhält man für die Bedingung des Gleichgewichts die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \Sigma \text{ P} \cos \alpha \\ 0 &= \Sigma \text{ P} \cos \beta \\ 0 &= \Sigma \text{ P} \cos \gamma \end{aligned}\right\} \ldots 5$$

d. h. für den Zustand des Gleichgewichts muß die algebraische Summe der Seitenkräfte nach jeder Axe gleich Null sein.

Vom statischen Moment.

§. 30.

Wenn zwei Kräfte P und Q, Fig. 21, in einer Ebene auf einen festen Körper wirken und um den Punkt A Drehung nach entgegengesetzten Richtungen hervorzubringen suchen, so wird nur dann Gleichgewicht stattfinden, wenn die Mittlere dieser Kräfte durch den vorausgesetzt festen Drehpunkt oder die feste Drehaxe geht. Verlängert man nun die Richtungen der Kräfte, bis sie sich in dem Punkte D schneiden, und zieht sodann durch D und A eine Linie, so muß diese die Richtung der Mittlern für den Zustand des Gleichgewichtes angeben. Fällt man nun von dem Drehpunkt A die Perpendikel $AB = p$ und $AC = q$ auf die Richtungen der Kräfte P und Q, so heißt man diese die Hebelsarme der Kräfte.

Man versteht somit unter Hebelsarm einer Kraft das Perpendikel aus dem Drehpunkt auf die Richtung derselben.

Das Product aus einer Kraft in ihren Hebelsarm nennt man das statische Moment dieser Kraft.

Nach §. 21 Gl. 2 haben wir nun

$$\text{P} . \sin \text{ADB} = \text{Q} . \sin \text{ADC}.$$

Wird diese Gleichung mit AD multiplicirt, so ergibt sich:

$$\text{P} . \text{AD} . \sin \text{ADB} = \text{Q} . \text{AD} . \sin \text{ADC}.$$

Nun ist aber

$$\text{AD} . \sin \text{ADB} = \text{AB} = \text{p} \text{ und } \text{AD} \sin \text{ADC} = \text{AC} = \text{q}.$$

Somit folgt:

$$\text{P} . \text{p} = \text{Q} . \text{q}$$

d. h. für den Zustand des Gleichgewichtes sind die statischen Momente der beiden Kräfte einander gleich.

§. 31.

Statisches Moment der Mittelkraft. Nehmen wir an die Kräfte P und Q wirken in einer Ebene an den beliebigen Punkten F, G nach den angezeigten Richtungen. Ihre Rückverlängerungen treffen sich in D, Fig. 22, so muß ihre Mittelkraft R durch diesen Punkt gehen, deren Richtung DR sein mag. Aus dem beliebigen Drehpunkte A in der Ebene fälle man auf die Richtungen der drei Kräfte die Perpendikel $AB = p$, $AC = q$, $AE = r$, verbinde A mit D durch AD und setze die Winkel $BDE = \alpha$, $CDE = \beta$, $ADE = \delta$. Nach §. 21 hat man nun die Gleichungen:

$$0 = P \sin \alpha - Q \sin \beta$$
$$R = P \cos \alpha + Q \cos \beta.$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $\cos \delta$, die zweite mit $\sin \delta$, so erhält man:

$$0 = P \cos \delta \sin \alpha - Q \cos \delta \sin \beta$$
$$R \sin \delta = P \sin \delta \cos \alpha + Q \sin \delta \cos \beta.$$

Zieht man von der letztern die vorletzte Gleichung ab und reducirt gehörig, so ergibt sich

$$R \sin \delta = P . \sin (\delta - \alpha) + Q \sin (\delta + \beta).$$

Multiplicirt man mit AD, so folgt

$$R . AD \sin \delta = P . AD \sin (\delta - \alpha) + Q . AD \sin (\delta + \beta).$$

Nun ist aber $AD \sin \delta = r$, $AD \sin (\delta - \alpha) = p$, $AD \sin (\delta + \beta) = q$, demnach erhält man die Gleichung:

$$Rr = Pp + Qq \ldots 1$$

d. h. wenn beide Kräfte in demselben Sinne drehen, so ist das statische Moment der Mittelkraft gleich der Summe der statischen Momente der Seitenkräfte.

Liegt der Punkt A im Winkel der Seitenkräfte, Fig. 23, dann suchen beide Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen zu drehen. Man findet ähnlich wie oben die Gleichung:

$$Rr = Pp - Qq \ldots 2$$

d. h. das statische Moment der Mittelkraft ist gleich der Differenz der statischen Momente der Seitenkräfte.

Geht die Richtung der Mittelkraft durch den Punkt A, so ist $r = 0$, also auch $Rr = 0$, und es findet Gleichgewicht statt. Es ist dann

$$0 = Pp - Qq \ldots 3.$$

Sind mehr als zwei Kräfte vorhanden, so findet man analog dem Obigen, daß das statische Moment der Mittelkraft gleich ist der algebraischen Summe der statischen Momente der Seitenkräfte und daß für den Zustand des Gleichgewichts die algebraische Summe der statischen Momente der Seitenkräfte gleich Null sein muß.

Von den Kräften, welche an verschiedenen fest mit einander verbundenen Punkten in einer Ebene nach beliebigen Richtungen wirken.

§. 32.

In der Ebene, Fig. 24, wirken beliebig viele Kräfte P′, P″, P‴... an den Punkten B, C, D.... Durch einen willkührlich gewählten Punkt A in dieser Ebene lege man zwei rechtwinkelige Coordinatenaxen XX, YY und bezeichne die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte mit der Axe XX der Reihe nach bilden mit α', α'', α'''...., sowie die Coordinaten ihrer Angriffspunkte durch x′, y′; x″, y″; x‴, y‴.... Die Perpendikel vom Ursprung A auf die Richtungen der Kräfte oder ihre Hebelsarme in Bezug auf diesen Punkt seien p′, p″, p‴....; R sei die Mittlere des ganzen Systems, r ihr Hebelsarm und φ der Winkel, den ihre Richtung mit XX bildet.

Um nun zunächst die Mittelkraft zu bestimmen, setze man zuerst P′ mit P″ zusammen. Man verlängere zu dem Ende ihre Richtungen bis sie sich in dem Punkte F schneiden, und zerlege jede in zwei rechtwinkelige Seitenkräfte parallel den Coordinatenaxen. Nach der Axe XX wird man erhalten $P' \cos \alpha'$ und $P'' \cos \alpha''$, parallel mit YY aber $P' \sin \alpha'$, $P'' \sin \alpha''$. Ist R′ die Mittlere von P′ und P″, φ' der Winkel, den sie mit XX bildet, so muß sein

$$R' \cos \varphi' = P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha''$$
$$R' \sin \varphi' = P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha''.$$

Hieraus läßt sich also R′ bestimmen. Man setze nun auf gleiche Weise R′ mit P‴ zusammen und fahre so fort bis zuletzt R gefunden ist und man wird zu folgenden Gleichungen gelangen:

$$R \cos \varphi = \Sigma P \cos \alpha \ldots 1$$
$$R \sin \varphi = \Sigma P \sin \alpha \ldots 2.$$

Hieraus ergibt sich:

$$R^2 = \Sigma (P \cos \alpha)^2 + \Sigma (P \sin \alpha)^2 \ldots 3$$
$$\text{tang } \varphi = \frac{\Sigma P \sin \alpha}{\Sigma P \cos \alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots 4.$$

In Bezug auf die Größe und Richtung der Mittelkraft erhält man also dieselben Gleichungen wie in §. 25, wo die Kräfte sämmtlich an einem Punkte angreifen. Einen besondern Fall, der hier noch vorkommen kann, werden wir später betrachten in (§. 35).

Bezeichnet r′ den Hebelsarm von R′, so ist nach §. 31 $R'r' = P'p' + P''p''$. Ist R″ die Mittelkraft von R′ und P‴, r″ ihr Hebelsarm, so hat man $R''r'' = R'r' + P'''p''' = P'p' + P''p'' + P'''p'''$. Auf ähnliche Weise mit der Zusammensetzung der statischen Momente fortfahrend, erhält man endlich die Gleichung:

$$Rr = \Sigma Pp \ldots 5$$

d. h. das statische Moment der Mittelkraft ist gleich der algebraischen Summe der sämmtlichen gegebenen Kräfte in Bezug auf jeden beliebigen Punkt in der Ebene.

Denkt man sich die Kräfte an ihren Angriffspunkten zerlegt, so ist für die Seitenkraft $P' \cos \alpha'$ das statische Moment $y' P' \cos \alpha'$ und für die andere Seitenkraft $x' P' \sin \alpha'$, beide Momente wirken sich aber entgegen, daher hat man nach §. 31 Gl. 2 die Gleichung

$$P'p' = P' (y' \cos \alpha' - x' \sin \alpha')$$

und so findet man $P''p'' = P'' (y'' \cos \alpha'' - x'' \sin \alpha'')$ u. s. f.

Sind x, y die Coordinaten des Angriffspunktes der Mittlern, so ist auch: $Rr = R (y \cos \varphi - x \sin \varphi)$. Statt der Gleichung 5 hat man daher auch folgende:

$$R (y \cos \varphi - x \sin \varphi) = \Sigma P (y \cos \alpha - x \sin \alpha) \ldots 6.$$

Bei der Anwendung der hier entwickelten Gleichungen müssen wieder die Zeichen der Seitenkräfte genau berücksichtigt werden. Was die Momentengleichung betrifft, so werden diejenigen Momente als die positiven betrachtet, welche Drehung von der positiven Axe der Y nach der positiven Axe der X bewirken, die andern werden als negativ angesehen.

§. 33.

Wenn das System sich im Gleichgewicht befindet, so muß die Mittlere Null sein. Setzt man daher in die Gleichungen 1, 2, 5, 6 des vorigen §. $R = 0$, so erhält man folgende Gleichungen für die Bedingung des Gleichgewichts:

$$0 = \Sigma P \cos \alpha \ldots 1$$
$$0 = \Sigma P \sin \alpha \ldots 2$$
$$\left.\begin{array}{l} 0 = \Sigma Pp \\ 0 = \Sigma P (y \cos \alpha - x \sin \alpha) \end{array}\right\} \ldots 3$$

d. h. die algebraische Summe der Seitenkräfte parallel mit jeder der Axen, sowie die algebraische Summe der statischen Momente muß gleich Null sein.

Beispiel. Eine feste unbiegsame Linie AB, Fig. 25, stütze sich auf der horizontalen Ebene in A und lehne sich in B gegen die verticale Wand BC, in den Punkten D, E frage sie die Gewichte W, Q. Man soll die Horizontal- und Verticalpressungen in A und B bestimmen?

Aufl. Es sei $\sphericalangle$ ABC $= \alpha$, AB $= l$; AD $= a$, AE $= b$. Man nehme in A und B die Stützpunkte weg und ersetze die Horizontal- und Verticaldrücke durch die Kräfte h, v, h', welche jenen gleich und entgegengesetzt sind und wodurch das Gleichgewicht hergestellt ist. Nehmen wir nun A als Drehpunkt, so ist $l \cos \alpha$ der Hebelsarm von h'; $b \sin \alpha$ der von Q; $a \sin \alpha$ der von W. Die Kräfte h und v gehen durch den Drehpunkt, daher sind ihre Hebelsarme, somit auch ihre Momente, Null. Wenden wir die obigen drei Gleichungen an, so erhalten wir unter gehöriger Berücksichtigung der Zeichen sofort folgende Gleichungen:

$$0 = h - h' \ldots 1$$
$$0 = W + Q - v \ldots 2$$
$$0 = W a \sin \alpha + Q b \sin \alpha - h' l \cos \alpha \ldots 3.$$

Aus diesen Gleichungen folgt der Verticaldruck in A oder $v = W + Q$; ferner die Horizontaldrücke in A und B oder

$$h = h' = \frac{W a + Q b}{l} . \operatorname{tang} \alpha.$$

Von den parallelen Kräften.

§. 34.

Parallele Kräfte in einer Ebene. Hat man eine beliebige Anzahl paralleler Kräfte P', P'', P''' ... in einer Ebene, so kann man ihre Mittlere, sowie den Angriffspunkt der Letztern mit Hilfe der im vorigen § entwickelten Gleichungen bestimmen. Unter der Voraussetzung des Parallelismus sämmtlicher Kräfte werden die Winkel, welche ihre Richtungen mit der Axe der X X bilden, alle gleich Null, also $\alpha' = 0$, $\alpha'' = 0$, $\alpha''' = 0$ .... $\varphi = 0$, daher $\cos \alpha' = \cos \alpha'' = \cos \alpha''' \ldots = \cos \varphi = 1$ und $\sin \alpha' = \sin \alpha'' = \sin \alpha''' \ldots = \sin \varphi = 0$. Die Gleichung 2 des vorigen § fällt somit ganz weg und aus Gleichung 1 wird:

$$R = \Sigma P \;\ldots\; 1$$

und in Bezug auf die Momente hat man nach Gl. 5

$$Rr = \Sigma Pp \;\ldots\; 2$$

$$r = \frac{\Sigma Pp}{R} \;\ldots\; 3$$

hieraus folgt: Die Mittelkraft ist gleich der algebraischen Summe der Seitenkräfte und ist parallel mit ihnen; das statische Moment der Mittelkraft ist gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der Seitenkräfte.

In Bezug auf Gl. 2 muß bemerkt werden, daß man die parallelen Kräfte durch eine Gerade AE', Fig. 26, in beliebiger Richtung schneiden, und die Entfernungen der Durchschnittspunkte, nämlich AB', AC', AD' ... statt der Hebelsarme AB, AC, AD einführen kann, wodurch die Gleichung allgemeiner wird. Denn ist $AB = p'$, $AC = r$, $AD = p''$, $AE = p'''$, so hat man

$$Rr = P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots$$

Es sei ferner $\sphericalangle\, EAE = \alpha$, $AB' = a'$, $AC' = q$; $AD' = a''$, $AE' = a'''$, so ist $r = q \cos \alpha$, $p' = a' \cos \alpha$, $p'' = a'' \cos \alpha$, $p''' = a''' \cos \alpha$, also

$$R.q \cos \alpha = P'a' \cos \alpha + P''a'' \cos \alpha + P'''a''' \cos \alpha$$

Somit: $$Rq = P'a' + P''a'' + P'''a''' + \ldots 4.$$

§. 35.

Es seien Fig. 27 P, Q zwei parallele Kräfte, R ihre Mittlere; die Entfernungen ihrer Durchschnittspunkte A, B, C von einem in der Durchschnittslinie beliebigen Punkt D seien $AD = p$, $BD = q$ $CD = r$, dann ist:

$$R = P + Q$$

$$Rr = Pp + Qq \ldots$$

Nun ist aber $r = p + AC$; $q = p + AC + BC$, daher

$$(P + Q)(p + AC) = Pp + Q(p + AC + BC)$$

und hieraus:

$$P.\,AC = Q.\,BC$$

$$P : Q = BC : AC \;\ldots\; 1$$

d. h. die Entfernung AB der Angriffspunkte der Seiten-

kräfte wird durch den Angriffspunkt der Mittelkraft so in zwei Theile getheilt, daß sie sich umgekehrt verhalten wie die anliegenden Kräfte.

Sodann hat man auch

$$P + Q : Q = BC + AC : AC$$
$$R : Q = AB : AC$$

und mit Zuziehung von 1

$$P : Q : R = BC : AC : AB \;.\;.\;.\; 2.$$

Wenn Q entgegengesetzt wirkt, Fig. 28, so hat man

$$R = P - Q$$
$$Rr = Pp - Qq$$

und daraus:

$$r = \frac{Pp - Qq}{R} = \frac{Pp - Qq}{P - Q}.$$

Wenn in diesem Falle $P = Q$ wird, so ist $R = P - P = 0$ und

$$r = \frac{Pp - Pq}{\text{Null}} = \infty \;.\;.\;.\; 3$$

hieraus folgt: Zwei gleiche parallele Kräfte, welche entgegengesetzte Richtung haben und an verschiedenen Punkten einer Ebene wirken, haben keine Mittelkraft und können auch durch keine einzige Kraft im Gleichgewicht erhalten werden.

Zwei gleiche entgegengesetzt wirkende parallele Kräfte, die verschiedene Angriffspunkte haben und in einer Ebene liegen, nennt man ein Kräftepaar, oder kurzweg ein Paar.

Wenn sich also ein System von Kräften auf ein Paar reducirt, so hat dasselbe keine Mittelkraft und kann auch durch keine einzige Kraft im Gleichgewicht erhalten werden. Dieser Fall kann auch vorkommen bei den Kräften, welche wir im §. 32 betrachtet haben.

Reducirt sich demnach ein System auf zwei gleiche entgegengesetzte parallele Kräfte, so kann nur dann Gleichgewicht bestehen, wenn beide in demselben Punkte angreifen. Man hat somit für die Bedingung des Gleichgewichts paralleler Kräfte die Gleichungen: $R = 0$ und $Rr = 0$ und aus 1, 2, 4 des §. 34 wird:

$$0 = \Sigma P \;.\;.\;.\; 4$$
$$0 = \Sigma Pp \;.\;.\;.\; 5.$$

Beispiel. An der festen geraden Linie AF, Fig. 29, wirken die parallelen Kräfte: $P' = 60$ Pfd., $P'' = 40$; $P''' = 20$; $P^{IV} = 30$; $P^{V} = 36$. Die Entfernungen der Angriffspunkte von dem beliebigen Punkte D seien der Reihe nach $AD = p'$ 12, $AB = 10$, $AC = p''' = 8$; $ED = p^{IV} = 3$, $FD = p^{V} = 6$. Man soll die Mittelkraft, sowie ihren Angriffspunkt, bestimmen.

Aufl. Wir betrachten die Kräfte, welche abwärts wirken, als positiv, die aufwärtswirkenden als negativ. Die Entfernungen der Angriffspunkte rechts von D als positiv und links als negativ. Nach §. 34 ist dann:

$$R = 60 - 40 + 20 + 30 - 36 = +\,34$$
$$Rr = 60.12 - 40.10 + 20.8 - 3.30 + 6.36 = +\,696$$
$$r = \frac{\Sigma Pp}{R} = \frac{696}{34} = 20\,\frac{8}{17}.$$

§. 36.

Das Product aus einer Kraft in das Perpendikel von ihrem Angriffspunkt auf eine Ebene nennt man das Moment dieser Kraft in Bezug auf die Ebene. Es seien nun P, Q zwei in einer Ebene liegende parallele Kräfte, R ihre Mittlere, Fig. 30. Aus den Angriffspunkten A, B, C fälle man auf die Ebene MN die Perpendikel AD = p, BF = q, CE = r, verbinde ihre Fußpunkte durch DF und ziehe CH, BH parallel zu DF. Man hat nun R = P + Q und P.AC = Q.BC. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ACG und BCH folgt:

$$AC : BC = AG : CH$$
$$AC : BC = (p - r) : (r - q)$$
$$AC = \frac{BC.(p - r)}{r - q}.$$

Man hat somit

$$P.\frac{BC\,(p - r)}{r - q} = Q.BC.$$

Daraus ergibt sich, wenn P + Q = R gesetzt wird:

$$Rr = Pp + Qq \;.\;.\;.\; 1.$$

Liegt der Punkt B unterhalb der Ebene MN, wie in Fig. 31, so wird q negativ und man erhält:

$$Rr = Pp - Qq \;.\;.\;.\; 2.$$

Das Moment der Mittelkraft zweier parallelen Kräfte in Bezug auf eine Ebene ist also gleich der algebraischen Summe der Momente der Seitenkräfte.

§. 37.

Parallele Kräfte im Raum. An einem festen Systeme wirken im Raume beliebig viele parallele Kräfte P', P'', P''', P^{IV}.... Die Coordinaten ihrer Angriffspunkte in Bezug auf drei rechtwinkelige Coordinatenebenen, Fig. 32, seien beziehungweise x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z'''; ... die Mittelkraft sei R und x, y, z die Coordinaten ihres Angriffspunktes in Bezug auf dieselben Ebenen. Man setze zuerst P' mit P'' zusammen, ihre Mittlere sei R' und die Coordinaten ihres Angriffspunktes a', b', c', so hat man mit Bezug auf §. 36

$$R' = P' + P''$$
$$R'a' = P'x' + P''x''$$
$$R'b' = P'y' + P''y''$$
$$R'c' = P'z' + P''z''$$

Nun setze man R' mit P''' zusammen, nenne R'' ihre Mittlere, a'' b'' c'' die Coordinaten des Angriffspunktes dieser, so ist

$$R'' = R' + P''' = P' + P'' + P'''$$
$$R''a'' = R'a' + P'''x''' = P'x' + P''x'' + P'''x'''$$
$$R''b'' = R'b' + P'''y''' = P'y' + P''y'' + P'''y'''$$
$$R''c'' = R'c' + P'''z''' = P'z' + P''z'' + P'''z'''$$

Fährt man auf diese Weise mit der Zusammensetzung fort, so erhält man zuletzt die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} R = \Sigma P \\ Rx = \Sigma Px \\ Ry = \Sigma Py \\ Rz = \Sigma Pz \end{array}\right\} \ldots 1$$

d. h. die Mittelkraft ist gleich der algebraischen Summe der Seitenkräfte. Das Moment der Mittelkraft in Bezug auf jede der drei Coordinatenebenen ist gleich der algebraischen Summe der Momente der Seitenkräfte in Bezug auf dieselben Ebenen.

Zur Bestimmung des Angriffspunktes der Mittelkraft erhält man aus 1 die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{\Sigma Px}{\Sigma P} \\ y = \dfrac{\Sigma Py}{\Sigma P} \\ z = \dfrac{\Sigma Pz}{\Sigma P} \end{array}\right\} \ldots 2.$$

Liegen sämmtliche Angriffspunkte in einer Ebene, z. B. in der Ebene XY, so werden $z' = 0$, $z'' = 0$, $z''' = 0$ u. s. w., also auch $z = 0$, und es fällt die letzte Gleichung in 1 und 2 weg.

Da die obigen Gleichungen sämmtlich unabhängig von dem Winkel sind, welche die Kraftrichtungen mit den Coordinatenaxen bilden, so läßt sich das ganze System drehen, ohne daß dadurch der Angriffspunkt der Mittlern geändert wird, wenn vorausgesetzt die Kräfte immer parallel bleiben. Der Punkt bleibt auch dann ungeändert, wenn man alle Kräfte in demselben Verhältnisse vergrößert oder verkleinert. Diesen Punkt, durch welchen also die Mittelkraft stets geht, heißt man den **Mittelpunkt der parallelen Kräfte**.

Für den Zustand des Gleichgewichts ist $R = 0$, daher erhält man aus 1 die Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \Sigma P \\ 0 = \Sigma Px \\ 0 = \Sigma Py \\ 0 = \Sigma Pz \end{array}\right\} \ldots 3.$$

Beispiel. Es seien die parallelen Kräfte gegeben $P' = 3$, $P'' = 4$, $P''' = 5$, $P^{IV} = 2$, sowie die Coordinaten ihrer Angriffspunkte $x' = 1$, $y' = 5$, $z' = 2$; $x'' = 3$, $y'' = 3$, $z'' = 8$; $x''' = 2$, $y''' = 6$, $z''' = 10$; $x^{IV} = 4$, $y^{IV} = 2$, $z^{IV} = 0$. Man soll die Mittlere, sowie ihren Angriffspunkt bestimmen?

Aufl. Nach Gl. 1 findet man:

$$\begin{array}{l} R = 3 + 4 + 5 + 2 = 14 \\ Rx = 3.1 + 4.3 + 5.2 + 2.4 = 36 \\ Ry = 3.5 + 4.3 + 5.6 + 2.2 = 61 \\ Rz = 3.2 + 4.8 + 5.10 + 2.0 = 88 \end{array}$$

also $x = \dfrac{26}{14} = 2{,}357$; $y = \dfrac{61}{14} = 4{,}357$; $z = 6{,}285$.

Von den Kräftepaaren.

§. 38.

Wirkung eines Paars. Den normalen Abstand der beiden Kraftrichtungen nennt man den **Arm** des Paars. Das Product aus einer der Kräfte in den Arm heißt man das **Moment des Paars.** Jede auf die Ebene des Paars in einem beliebigen Punkte errichtete Normale nennt man eine **Axe** desselben.

In einer Ebene MN, Fig. 33, wirke das Paar P, P′ an den Angriffspunkten D, E. Durch C gehe die Axe desselben. Fällt man aus C auf die Kraftrichtungen das Perpendikel CB, so ist AB der Arm des Paars. In Bezug auf die Axe C ist nun AC der Hebelsarm von P und BC von P′. Die beiden Kräfte haben nun das Bestreben, die Ebene in der Richtung des Pfeiles zu drehen. Die statischen Momente in Bezug auf C sind PAC und P′BC, da sich aber beide entgegengesetzt sind, so wird ihre Gesammtwirkung ausgedrückt durch die Differenz ihrer Momente:

$$P'.BC - P.AC.$$

Es ist aber $P' = P$, also erhält man auch diese Wirkung:

$$P(BC - AC) = P.AB.$$

Nimmt man die Axe in irgend einem Punkte zwischen den Kraftrichtungen etwa in C′ an, so hat man wieder das Bestreben des Paars oder die Wirkung ausgedrückt durch:

$$P.AC' + P'.BC' = P(AC' + BC')$$

oder

$$P.AB$$

dasselbe Resultat wie vorhin.

Die Wirkung eines Paars besteht also in dem Bestreben, die Ebene, worin das Paar liegt, um irgend eine Axe zu drehen. Die Größe dieser Wirkung wird stets durch das Moment des Paars gemessen, ganz gleichgültig, in welchem Punkt der Ebene man auch die Drehaxe sich denken mag.

Zwei Paare in einer Ebene haben gleichen oder entgegengesetzten Sinn, je nachdem sie die Ebene nach derselben oder nach entgegengesetzten Richtungen zu drehen suchen.

§. 39.

Versetzung einer Kraft parallel zu sich selbst. Es sei Fig. 34 P′ eine in A angreifende, nach AB wirkende Kraft, C ein mit A festverbundener Punkt in der Ebene dieser Kraft. Fällt man von C auf die Richtung von P′ das Perpendikel CB, so ist P′.BC das statische Moment dieser Kraft in Bezug auf den Punkt C. Bringt man in C parallel zu P′ die beiden einander entgegengesetzt wirkenden Kräfte P″ und P‴ jede gleich P′ an, so wird dadurch die Wirkung von P′ nicht geändert. Wir haben nun ein System von drei gleichen Kräften, das wir betrachten können, bestehend aus dem Paar (P′, — P″), wirkend im Sinne der ursprünglich gegebenen Kraft (und dessen Moment gleich ist dem statischen Moment der Kraft) und der Einzelkraft

P''' parallel der ursprünglichen und in gleichem Sinne wirkend. Wir können also annehmen, die an A oder an irgend einem andern Punkte B ihrer Richtungslinie wirkende Kraft P' sei parallel zu sich selbst nach C versetzt worden und wirke nach CD; zugleich aber sei ein Paar angebracht, dessen Moment dem statischen Momente der Kraft P' gleich ist und in gleichem Sinne wie diese wirksam.

Will man also eine Einzelkraft an einen beliebigen Punkt ihrer Ebene parallel zu sich selbst versetzen, ohne ihre Wirkung zu verändern, so darf man nur zugleich ein Paar in dieser Ebene anbringen, dessen Moment gleich ist dem statischen Momente der Einzelkraft in Bezug auf jenen Punkt und das in demselben Sinne wirkt, wie diese.

§. 40.

Versetzung der Paare. Irgend ein Paar läßt sich in seiner Ebene oder auch in jede parallele Ebene beliebig versetzen und in dieser Ebene drehen, ohne seine Wirkung zu ändern, vorausgesetzt, daß die Paare gleiche Momente und gleichen Sinn behalten, und der neue Arm unveränderlich mit dem ersten verbunden sei.

Zum Beweise des ersten Theils dieses Satzes nehmen wir an, es sei Fig. 35 $(P, -P)$ ein Paar an dem Arme AB wirksam. Wir nehmen nun in der Ebene dieses Paars oder in einer damit parallelen Ebene die gerade Linie CD gleich und parallel AB, und lassen an den Endpunkten C und D normal auf CD die Kräfte P', $-P''$; P'', $-P'$ jede gleich P wirken, dann werden sich die an den Punkten C und D wirkenden Kräfte aufheben, und es wird demnach durch Anbringung jener Kräfte in der Wirkung des Paars $(P, -P)$ durchaus keine Aenderung erfolgen. Zieht man die Linien AD und CD, so liegen beide in einerlei Ebene und halbiren sich gegenseitig in E. Die beiden gleichen parallelen Kräfte P und $-P'$ können aber im Punkte E durch ihre von E nach f wirkende Mittelkraft $= 2P$ ersetzt werden. Ebenso die Kräfte $-P''$ und $-P$ durch ihre von E nach g wirkende Mittelkraft $= 2P$. Diese beiden gleichen Mittelkräfte heben sich sofort auf, oder mit andern Worten: Die Paare $(P, -P')$ und $(P', -P)$ halten sich im Gleichgewicht, und es bleibt also nur noch das Paar $(P'', -P'')$ übrig, welches am Arm CD wirkt. Es ist somit das Paar $(P, -P)$ nach CD parallel zu sich selbst ohne Wirkungsänderung versetzt.

Um ferner noch den Theil des Satzes in Bezug auf Drehung des Paars zu beweisen, nehmen wir an, das Paar $(P, -P)$, Fig. 36, wirke rechtwinkelig auf die Gerade $CD = AB$ so, daß beide Linien sich in E schneiden und halbiren. Bringen wir nun an der Linie CD die zwei entgegengesetzten Paare $(P', -P')$ und $(P'', -P'')$, aber beide gleich dem gegebenen Paar an, so heben sie sich gegenseitig auf und ändern somit nichts an der Wirkung des gegebenen Paars. Nun aber schneiden sich die Richtungen der gleichen Kräfte P und $-P''$ in F, ihre Mittelkraft wirkt von E nach F und halbirt den Winkel AEC. Die Mittelkraft der gleichen Kräfte $-P$ und P'' wirkt

von E gegen H und halbirt den Winkel DEB. Beide Mittelkräfte sind gleich und entgegengesetzt, sie heben sich also auf, oder die Kräfte (P — P″) und (— P, P″) zerstören sich gegenseitig. Es bleibt also nur noch das Paar (P′, — P′) übrig, welches an dem Arm CD wirkt. Dieses Paar ist aber dem gegebenen ganz gleich und es folgt also, daß ein Paar um einen beliebigen Winkel gedreht werden kann, ohne seine Wirkung zu ändern.

§. 41.

Gleichgewicht zweier Paare. Zwei Paare, welche gleiche Momente und entgegengesetzten Sinn haben, heben sich gegenseitig auf.

Das Paar, Fig. 37, (P, — P) wirke an den Punkten A, B und das entgegengesetzte Paar (Q, — Q) an den Punkten C, D. Durch Verlängerung der Richtungen der Paare entsteht das Parallelogramm ESFW. Die Kräfte P und Q kann man in ihrem Durchschnittspunkt F, sowie die Kräfte — P und — Q an E wirken lassen. Fällt man die Perpendikel EV und FN, so sind diese die Arme der Paare und es wird angenommen, daß stattfinde: P.EV = Q.FN oder P:Q = FN:EV. Macht man FK = EG = P und FM = EH = Q, vollendet die Parallelogramme KFML, EGJH, so sind die Diagonalen FL, EJ die Mittelkräfte der Kräfte P, Q und — P, — Q. Da nun die Seitenkräfte gleich und beziehungsweise parallel sind, so müssen auch die Mittelkräfte gleich sein, also FL = JE. Diese müssen nun, sofern sie sich aufheben sollen, in einer geraden Linie liegen. Man hat nun nach der Voraussetzung P:Q = FN:EV. Ferner ist EV.FW = FN.EW oder FN:EV = FW:EW, daher P:Q = FW:EW, oder KF:FM = EG:EH = FW:EW. Hieraus folgt, daß FL und EF in einer geraden Linie liegen müssen. Da sie nun gleich und entgegengesetzt sind, so heben sie sich gegenseitig auf.

§. 42.

Umformung der Paare. Ein Paar kann durch ein anderes von gleichem Sinn ersetzt werden, wenn die Momente beider Paare gleich sind.

Zum Beweis dieses Satzes nehmen wir an, es sei Fig. 38 (P, — P) ein am Arm AB wirkendes Paar, welches durch ein anderes (Q, — Q), dessen Arm BC in der Verlängerung von AB liege, ersetzt werden soll. Nach dem ausgesprochenen Satze wird dieß möglich sein, wenn stattfindet P.AB = Q.BC. Bringen wir nun an der Verlängerung von AB in B und C parallel zu dem gegebenen Paare die beiden gleichen, aber entgegengesetzt wirkenden Paare (Q, — Q) und (Q′, — Q′) an, so werden letztere offenbar sich aufheben und also auf die Wirkung des gegebenen Paars keinen Einfluß ausüben. Betrachtet man aber die Kräfte P und Q oder P und Q′, so verhält sich P:Q′ = BC:AB. Da sich nun diese beiden Kräfte umgekehrt wie die ihnen anliegenden Abschnitte der Linie AC verhalten, so muß ihre Mittelkraft P + Q′ = Q durch den Punkt

B gehen. Diese Mittelkraft ist aber auch gleich den Kräften $-P -Q'$ an B und hebt folglich dieselben auf, oder es zerstören sich die Kräfte $P, Q', -P, -Q'$. Somit bleibt also nur noch das Paar $(Q, -Q)$ am Arme BC übrig und ersetzt demnach das Paar $(P, -P)$. Es sind also Paare von gleichen Momenten und gleichem Sinne gleichbedeutend.

Auch ist leicht einzusehen, daß die Momente der Paare bei gleichen Seitenkräften sich verhalten wie ihre Arme; bei gleichen Armen wie ihre Seitenkräfte.

Soll nun ein Paar $(P, -P)$ vom Hebelsarm a durch ein anderes vom Hebelsarm b ersetzt werden, so sei Q die Seitenkraft des letztern. Da nun die Momente gleich sein müssen, so hat man:

$$Q.b = P.a$$

also:

$$Q = \frac{Pa}{b}$$

$$b = \frac{Pa}{Q}$$

§. 43.

Zusammensetzung der Paare. Wir wollen zuerst zwei Paare betrachten, welche sich entweder in derselben Ebene oder in paralleler Ebene befinden. Ist letzteres der Fall, so versetze man beide in dieselbe Ebene nach §. 40, wodurch die Wirkung nicht geändert wird. Alsdann bringe man sie auf den gleichen Arm und ersetze sie dann durch ein einzelnes Paar. Es seien P und Q die Seitenkräfte der gegebenen Paare, p und q ihre Arme, somit Pp und Qq ihre Momente, r der Arm, auf welchen beide Paare gebracht werden sollen. Ist P' die Seitenkraft des Paars am Arme r, welches das erste Paar ersetzen soll, so muß sein $P'r = Pp$. Ist Q' die Seitenkraft des Paars, wodurch das zweite ersetzt werden soll, so muß stattfinden $Q'r = Qq$. Die am Arme r wirkenden beiden Paare lassen sich nun in ein resultirendes Paar zusammensetzen, dessen Moment $(P' + Q')\, r$ ist.

Nun ist aber:

$$(P' + Q')\, r = P'r + Q'r = Pp + Qq.$$

Hieraus folgt: Das Moment des resultirenden Paars ist gleich der Summe oder Differenz der Seitenpaare, je nachdem diese gleichen oder entgegengesetzten Sinn haben.

So wie man nun zwei Paare zusammensetzen kann, ebenso kann man jede beliebige Anzahl Paare in ein resultirendes Paar von gegebenem Arm zusammensetzen.

Seien $P'p'$, $P''p''$, $P'''p'''$ .... $P^n p^n$ die Momente der einzelnen Paare, $(R, -R)$ das resultirende Paar, r dessen Arm. Es läßt sich nun durch Wiederholung des obigen Verfahrens leicht folgende Gleichung ableiten:

$$Rr = P'p' + P''p'' + P'''p''' \ldots P^n p^n = \Sigma Pp.$$

Hieraus folgt:

$$R = \frac{\Sigma Pp}{r}.$$

Der Sinn des resultirenden Paars wird durch das Zeichen der algebraischen Summe ΣPp bestimmt.

Es wird nun auch nicht schwer sein, ein gegebenes Paar in Seitenpaare zu zerlegen.

§. 44.

Wir wollen nun zwei Paare, welche in Ebenen liegen, die sich unter einem beliebigen Winkel schneiden, zusammensetzen. Denken wir uns in den Ebenen MM, NN, Fig. 38, welche sich in der Linie AB schneiden, zwei ganz verschiedene Paare. Man bringe beide Paare auf den gleichen Arm. Die hierdurch erhaltenen Seitenkräfte für das Paar in der Ebene N seien (P, —P) und für das Paar in der Ebene M (Q, —Q). Man versetze nun beide Paare so, daß ihre Arme in die Durchschnittslinie AB zu liegen kommen und mit AC zusammenfallen. Construirt man nun das Parallelogramm aus den in C sich treffenden Seitenkräften P und Q, so erhält man ihre Mittelkraft R. Ebenso erhält man aus den in A wirkenden Kräften die Mittelkraft —R. Die beiden Mittelkräfte sind gleich aber entgegengesetzt und bilden sofort das resultirende Paar (R, —R) an dem gleichen Arme wirksam.

Man kann nun umgekehrt auch jedes Paar in zwei in verschiedenen Ebenen liegende Seitenpaare zerlegen, vorausgesetzt, daß sich die Ebenen der Seitenpaare mit der Ebene des resultirenden Paars in derselben oder in parallelen Geraden schneiden.

Da die drei Paare P, —P); (Q, — Q); (R, —R) denselben Arm haben, so verhalten sich ihre Momente beziehungsweise wie die Kräfte P, Q, R. Wenn demnach die Linien CP, CQ die Momente der Seitenpaare darstellen, so wird die Diagonale CR des aus diesen Linien construirten Parallelogramms AQRP das Moment des resultirenden Paars repräsentiren. Es ist nun ferner ersichtlich, daß die Winkel, welche die Linien CP, CQ, CR mit einander bilden, auch die Winkel messen, die von den drei Ebenen gebildet werden. Die Ebene des resultirenden Paars theilt den Winkel, der von den Ebenen der Seitenpaare gebildet wird, ebenso wie die Diagonale CR den Winkel der beiden Seitenkräfte CP und CR theilt u. s. w.

§. 45.

Parallelogramm der Paare. Die Lage eines Paars ist bestimmt durch diejenige seiner Ebene. Es läßt sich aber mit Hilfe der Axen die Lage des Paars ebenfalls bestimmen. Denn ein Paar kann beliebig in einer Ebene gelegen sein oder auch in einer parallelen Ebene, immerhin wird die Axe die Lage des Paars im Raume angeben. Denn kennt man die Axe, so darf man nur eine auf diese normale Ebene führen und diese als die Ebene des Paars betrachten.

Da die Axe durch jeden beliebigen Punkt der Ebene des Paars geführt werden kann, so genügt eine Axe für die Bestimmung der Lage der Paare in einer beliebigen Anzahl paralleler Ebenen. Diese Axe kann dann die gemeinschaftliche Axe aller dieser Paare genannt werden.

Befinden sich die Paare in beliebigen Ebenen im Raume, so kann man alle diejenigen, welche in parallelen Ebenen liegen, in eine dieser Ebenen versetzt und da vereinigt denken. Alle diese Ebenen kann man nun durch einen beliebigen Punkt A im Raume geführt denken, welcher der gemeinschaftliche Mittelpunkt der Paare genannt werden kann. Nimmt man diesen Punkt zum Ursprung und führt durch denselben auf die verschiedenen Ebenen Perpendikel, so stellen diese die Axen der verschiedenen parallelen Paare dar, und bestimmen somit die Lage der Paare. Diese Axen bilden unter sich dieselben Winkel, wie die bezüglichen Ebenen der Paare.

Bezeichnet man die Momente der Paare mit L, M, N . . . und drückt diese durch die Linien AL, AM, AN . . . aus, schneidet alsdann vom Ursprung A an diese Längen auf den betreffenden Axen ab, so repräsentiren diese Linien zugleich die Axen und Größen der correspondirenden Paare.

Auch der Sinn, in welchem ein Paar wirkt, läßt sich mit Hilfe der Axen genau bestimmen. Denken wir uns vom Ursprung A aus die Länge AL abgeschnitten und sehen vom Endpunkt L aus nach dem Ursprung, so wird das Paar die Ebene entweder von der Linken zur Rechten oder umgekehrt um die Axe drehen. Nehmen wir also für den Sinn des Paars die Drehung von der Linken zur Rechten an. Schneiden wir nun von A aus in entgegengesetzter Richtung ein Stück AL′ auf der Axe ab, welches ein Paar L′ repräsentirt, denken jetzt das Auge in L′ und sehen gegen die Ebene, dann wird eine Drehung der Ebene von der Linken zur Rechten im entgegengesetzten Sinne wie oben erfolgen. Haben demnach zwei Paare, deren Momente L und L′ sind, verschiedenen Sinn, so darf man nur von A aus auf der Axe die Größe der Momente in entgegengesetzten Richtungen abtragen, wodurch sofort der Sinn der Paare genau bestimmt wird.

Wenn man die Momente zweier Paare vom Durchschnittspunkt ihrer Axen aus abschneidet, und construirt das Parallelogramm aus diesen Linien und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel, so repräsentirt die Diagonale das resultirende Paar sowohl der Größe als Richtung nach. Die Ebene des resultirenden Paars steht normal auf der Richtung der Diagonale. Dieß so construirte Parallelogramm heißt das Parallelogramm der Paare.

Es lassen sich also mittelst der Axen die Paare durch einfache Linien darstellen und zusammensetzen wie einfache Kräfte. Das Parallelogramm der Paare hat demnach für Drehkräfte dieselbe Wichtigkeit, wie das Parallelogramm der Kräfte für progressiv wirkende Kräfte, und es gelten auch hier die früher abgeleiteten Relationen in Bezug auf Zusammensetzung, Zerlegung u. s. w.

Sind drei Paare durch ihre Axen gegeben, so wird Größe und Richtung des resultirenden Paares gefunden durch die Diagonale des Parallelepipeds, das sich aus den drei Axen construiren läßt. Dieses Parallelepiped heißt das Parallelepipedon der Paare.

Stehen die Axen der Seitenpaare rechtwinkelig aufeinander und sind L, M, N die Momente der Seitenpaare, G das des resultirenden Paars; α, β, γ die Winkel, welche die Axe des resultirenden Paars mit den Seitenpaaren bilden, so hat man:

$$G^2 = L^2 + M^2 + N^2$$

$$\cos\alpha = \frac{L}{G};\ \cos\beta = \frac{M}{G};\ \cos\gamma = \frac{N}{G}.$$

Aehnlich wie eine einfache Kraft läßt sich auch ein Paar in drei Seitenpaare zerlegen.

Von den Kräften im Raume überhaupt.

§. 46.

Allgemeine Betrachtungen. Eine beliebige Anzahl Kräfte P′, P″, P‴ . . . wirke auf irgend eine Weise an einem festen System an verschiedenen Angriffspunkten nach verschiedenen Richtungen. Betrachten wir zuerst eine der Kräfte P′, deren Angriffspunkt B sei, Fig. 39. Man nehme im Raume einen beliebigen Punkt A als Ursprung dreier rechtwinkeligen Coördinatenaxen AX, AY, AZ an. Nun kann die Kraft P′ parallel zu sich selbst in den Punkt A versetzt werden, wenn man zugleich in derselben Ebene ein Paar (P′, —P′) anbringt, das an der Geraden AB wirksam ist und dessen Moment dem statischen Moment von P′ gleich ist. Dieses Paar kann man aber auch in irgend eine andere Parallelebene versetzt denken; alsdann bleibt an dem Punkt A nur die Kraft P′ wirksam.

Verfährt man auf gleiche Weise mit jeder einzelnen Kraft, so erhält man ein System von Einzelkräften, die alle denselben Punkt A zum Angriffspunkt haben. Ferner erhält man ein System von Paaren.

Nun lassen sich aber alle im gemeinschaftlichen Punkte A angreifenden Kräfte in eine einzige Mittelkraft R zusammensetzen, ebenso lassen sich alle Paare in ein resultirendes Paar (S, —S) vereinigen, dessen Ebene im Allgemeinen geneigt sein wird gegen die Richtung der Einzelkraft.

Demnach lassen sich also beliebig viele Kräfte, die im Raume an einem festen Systeme wirken, reduciren auf eine Einzelkraft, welche durch einen beliebigen, im Raume gegebenen Punkt geht, und auf ein entsprechendes Paar.

Die Größe, Richtung und der Sinn der Mittelkraft R werden immer dieselben bleiben, man mag den Punkt A annehmen wo man will, weil ja durch Veränderung des Punktes A im Raume die Mittelkraft nur parallel zu sich selbst dadurch versetzt wird. Die

Ebene und die Größe des resultirenden Paars wird sich aber nothwendigerweise verändern.

Unter den unendlich vielen Lagen, die man dem Ursprung A geben kann, ist eine besonders ausgezeichnet. Es läßt sich derselbe nämlich immer so wählen, daß die Ebene des resultirenden Paars normal auf der Richtung der Mittelkraft R steht. Denn denken wir uns die Ebene des resultirenden Paars beliebig geneigt gegen die Richtung der Mittelkraft, so läßt sich das Paar (S, —S) in zwei Seitenpaare (T, —T) und (V, —V) zerlegen, wovon das erste in einer zu AR normalen Ebene liegt, das andere in der Ebene, in welcher die Richtung der Mittelkraft sich befindet. In letzterer Ebene liegt also ein Paar (V, —V) und die Mittelkraft R. Versetzt man nun die Mittelkraft R an einen Punkt O in derselben Ebene, und bringt zugleich das Paar (R, —R) darin so an, daß dasselbe gleiches Moment und entgegengesetzten Sinn mit (V, —V) hat, so werden sich beide Paare in dieser Ebene aufheben und es bleibt also am Punkt O noch die Kraft R wirksam, die zugleich normal auf der Ebene des Paars (T, — T) steht. Also läßt sich das ganze System reduciren auf eine Einzelkraft und ein Paar, dessen Ebene normal auf der Richtung jener steht.

Ist das System nicht im Gleichgewicht und soll sich dasselbe auf eine einzige Kraft reduciren lassen, so muß nothwendig das Paar (S, — S) mit der Kraft R in derselben oder in einer parallelen Ebene liegen oder die Axe des Paars muß normal auf der Ebene der Kraft R stehen. Denn es läßt sich eine Kraft — R anbringen, welche mit R in derselben Ebene ein Paar bildet, das mit dem Paar (S, —S) das Gleichgewicht hergestellt.

Ein Paar kann nun niemals durch eine Einzelkraft im Gleichgewicht erhalten werden, mag ihre Richtung im Raume sein, welche sie will.

Soll daher bei einem beliebigen Systeme Gleichgewicht bestehen, so müssen sämmtliche an einen Punkt parallel zu sich selbst versetzten Kräfte für sich im Gleichgewicht also, R = 0 sein, ferner müssen die entsprechenden Paare gleichfalls für sich im Gleichgewicht sein oder das Moment des resultirenden Paars muß den Werth Null haben.

§. 47.

Gleichungen für das Gleichgewicht. Es seien α', β', γ'; α'', β'', γ''; . . . die Winkel, welche die Richtungen der genannten Kräfte mit den Axen AX, AY, AZ bilden; x', y', z'; x'', y'', z'' . . . die Coordinaten ihrer Angriffspunkte. Man zerlege nun jede einzelne Kraft in drei rechtwinkelige Seitenkräfte parallel zu den Coordinatenaxen. Die Seitenkräfte parallel zu den gleichnamigen Axen seien X', X'', X''' . . .; Y', Y'', Y''' . . .; Z', Z'', Z''' . . .; die Seitenkräfte von P' sind also $X' = P' \cos \alpha'$, $Y' = P' \cos \beta'$,

$Z' = P' \cos \gamma'$; die von P'' sind $X'' = P'' \cos \alpha''$, $Y'' = P'' \cos \beta''$, $Z'' = P'' \cos \gamma''$; u. s. w.

Man versetze sämmtliche Seitenkräfte parallel zu sich selbst in den Ursprung der Coordinatenaxen, und bringe zugleich die denselben entsprechenden Paare $(X', -X')$, $(Y', -Y')$, $(Z', -Z')$ u. s. w. an. Die im Ursprung vereinigten nach den Axen wirkenden Kräfte lassen sich nun in eine Mittelkraft R zusammensetzen. Sind X, Y, Z die Mittelkräfte der nach den betreffenden Axen wirkenden Seitenkräfte, so hat man, im Falle das System eine Mittelkraft hat:

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

Soll aber unter den an A wirkenden Kräften Gleichgewicht bestehen, so muß $R = 0$ sein. Dieß kann aber nur dann stattfinden, wenn die Seitenkräfte nach jeder der drei Axen im Gleichgewicht sind, also wenn $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ ist. Somit erhält man die Gleichungen

$$X' + X'' + X''' + \ldots = 0$$
$$Y' + Y'' + Y''' + \ldots = 0$$
$$Z' + Z'' + Z''' + \ldots = 0$$

d. h. für den Zustand des Gleichgewichts muß die algebraische Summe der Seitenkräfte parallel mit jeder Axe gleich Null sein.

Um nun die Gleichungen für die zweite allgemeine Gleichgewichtsbedingung in Bezug auf die Paare herzuleiten, betrachten wir zuerst die Seitenkräfte parallel der Axe der Z. Es ist B der Angriffspunkt der Kraft P', also auch der der Kräfte X', Y', Z'. Bei der Versetzung der Kraft Z' von B nach A wurde zugleich das entsprechende Paar $(Z', -Z')$ an AB wirkend angebracht. Verlängert man die Richtung von Z' durch B bis zum Durchschnittspunkt D mit der Ebene XAY und bildet das Parallelogramm ACDE, so ist die Diagonale AD der Arm des Paars $(Z', -Z')$, also das Moment $Z'.AD = Z' \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AE}^2} = Z' \sqrt{x'^2 + y'^2}$. Dieses Paar kann aber zerlegt werden in zwei Seitenpaare von den gleichen und parallelen Kräften in die Ebene XAZ und YAZ, wirksam an den Armen x' und y'. Dieselbe Zerlegung kann man mit allen den Kräften Z', Z'', Z''', ... entsprechenden Paaren vornehmen. Hieraus erhält man zwei Systeme von Paaren in den Ebenen XAZ und YAZ. Auf ähnliche Weise verfahre man mit Paaren, welche den den Seitenkräften parallel den andern Axen entsprechen. Hierdurch werden sämmtliche Paare in die Coordinatenebenen versetzt. In jeder dieser Ebene lassen sich aber die Paare in ein einziges Paar zusammensetzen, welches gleich ihrer Summe ist. Somit erhält man drei partielle resultirende Paare, welche sich aber wieder in ein allgemein resultirendes Paar vereinigen lassen. Dieses resultirende Paar muß aber für den Zustand des Gleichgewichts gleich Null sein. Da aber die drei partiellen Paare in drei verschiedenen sich schneidenden Ebenen liegen, so kann ihr resultirendes Paar niemals gleich Null sein, wenn

nicht jedes partielle Paar für sich gleich Null ist. Es muß also in jeder der drei Ebenen die Summe der Momente der Paare gleich Null sein.

In der Ebene YAZ haben wir die Paare $(Z', -Z')$, $(Z'' - Z'')$ ... wirksam an den Armen y', y'' ....; ihre Momente sind also $Z'y'$, $Z''y''$ ....; ferner die Paare $(Y', -Y')$, $(Y'', -Y'')$ ... an den Armen Z', z'', ... also deren Momente $Y'z'$, $Y''z''$,... Es muß nun die Summe der Momente in dieser Ebene gleich Null sein. Demnach hat man die Gleichung

$$Y'z' + Y''z'' + Y'''z''' + \ldots - Z'y' - Z''y'' - Z'''y''' - \ldots = 0.$$

Auf gleiche Weise erhält man für die beiden andern Ebenen die Gleichungen:

$$Z'x' + Z''x'' + Z'''x''' + \ldots - X'z' - X''z'' - X'''z''' - \ldots = 0$$
$$X'y' + X''y'' + X'''y''' + \ldots - Y'x' - Y''x'' - Y'''x''' - \ldots = 0.$$

In Beziehung auf die Zeichen der in den obigen Gleichungen vorkommenden Ordinaten betrachten wir die Richtungen AX, AY, AZ als die positiven, und die entgegengesetzten als die negativen. Von den Kräften werden diejenigen als positiv angesehen, welche von ihren Angriffspunkten an die Coordinaten zu verlängern streben und diejenigen als negativ, welche sie zu verkürzen suchen.

Wenn man nun in sämmtliche, oben entwickelten Formeln die Werthe für X', Y', Z'; X'', Y'', Z'' ... einführt, so erhält man für den Zustand des Gleichgewichtes der Kräfte im Raume folgende sechs Bedingungsgleichungen:

$$\Sigma P \cos \alpha = 0$$
$$\Sigma P \cos \beta = 0$$
$$\Sigma P \cos \gamma = 0$$
$$\Sigma P (z \cos \beta - y \cos \gamma) = 0$$
$$\Sigma P (x \cos \gamma - z \cos \alpha) = 0$$
$$\Sigma P (y \cos \alpha - x \cos \beta) = 0$$

Von diesen sechs Gleichungen beziehen sich nun die drei ersten auf die fortschreitende, die drei letztern auf die drehende Bewegung.

§. 48.

Bestimmung der Mittelkraft. Wenn das System nicht im Gleichgewicht ist, und sich auf eine Mittelkraft R reduciren läßt, deren Richtung mit den Coordinatenaxen die Winkel a, b, c bildet, so müssen folgende Gleichungen stattfinden:

$$R \cos a = \Sigma P \cos \alpha$$
$$R \cos b = \Sigma P \cos \beta$$
$$R \cos c = \Sigma P \cos \gamma$$

hieraus läßt sich leicht ableiten:

$$R = \sqrt{(\Sigma P \cos \alpha)^2 + (\Sigma P \cos \beta)^2 + (\Sigma P \cos \gamma)^2}$$

$$\cos a = \frac{\Sigma P \cos \alpha}{R}$$

$$\cos b = \frac{\Sigma P \cos \beta}{R}$$
$$\cos c = \frac{\Sigma P \cos \gamma}{R}.$$

Wenn die Summe der Momente der Paare in den drei Coordinatenebenen mit L, M, N bezeichnet wird, so hat man ferner die Gleichungen:

$$L = \Sigma P (z \cos \beta - y \cos \gamma)$$
$$M = \Sigma P (x \cos \gamma - z \cos \alpha)$$
$$N = \Sigma P (y \cos \alpha - x \cos \beta).$$

Sind x, y, z die Coordinaten von R, so erhält man aber auch die Gleichungen:

$$L = R (z \cos b - y \cos c)$$
$$M = R (x \cos c - z \cos a)$$
$$N = R (y \cos a - x \cos b)$$

oder auch:

$$L = Yz - Zy$$
$$M = Zx - Xz$$
$$N = Xy - Yx.$$

Wenn man aus diesen drei Gleichungen zwei der unbekannten Ordinaten x, y, z eliminirt, so erhält man zuletzt:

$$LX + MY + NZ = 0.$$

Diese Gleichung enthält keine der Coordinaten, sie gibt aber die Bedingung an, welche stattfinden muß zwischen den Kräften X, Y, Z und den partiellen Momenten L, M, N, damit die drei obigen Gleichungen möglich sein, oder alle Kräfte des Systems eine einzige Mittelkraft haben können.

Man sieht, daß die Coordinaten der Mittelkraft aus obigen Gleichungen nicht bestimmt werden können. Um aber die Lage der Mittlern dennoch zu bezeichnen, bestimmt man die Coordinaten des Punktes, in welchem sie eine der Coordinatenebenen schneidet. So hat man dann für einen Punkt in der Ebene YAZ, $x = 0$. Man findet sofort die beiden andern Coordinaten:

$$y = \frac{N}{X}; z = -\frac{M}{X}.$$

Setzt man $y = 0$, so erhält man die Coordinaten des Punktes in der Ebene XAZ:

$$x = -\frac{N}{Y}; z = \frac{L}{y}.$$

§. 49.

Allgemeine Reduction der Kräfte. Im Allgemeinen läßt sich das System immer auf eine einzige Mittelkraft und ein Paar reduciren. Die Mittelkraft ist dann

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

die Richtungswinkel:

$$\cos a = \frac{X}{R};\ \cos b = \frac{Y}{R};\ \cos c = \frac{Z}{R}.$$

Ist G das Moment des resultirenden Paars, so hat man

$$G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$$

Construirt man mit den Axen der Paare L, M, N das Parallelepipedon der Paare und sind λ, μ, ν die Winkel, welche die Axe des resultirenden Paares G mit den drei Coordinatenaxen bildet, so hat man

$$\cos \lambda = \frac{L}{G};\ \cos \mu = \frac{M}{G};\ \cos \nu = \frac{N}{G}.$$

Es läßt sich nun direct die Bedingung herleiten, unter welcher das System eine einzige Mittelkraft hat.

Die Richtung von R wird mit der Axe von G im Allgemeinen einen Winkel δ bilden. Nach einem Satze aus der analytischen Geometrie hat man dann:

$$\cos \delta = \cos a . \cos \lambda + \cos b . \cos \mu + \cos c \cos \nu.$$

Soll nun eine einzige Mittelkraft stattfinden, so muß die Axe des resultirenden Paars normal auf der Ebene von R stehen, oder es muß $\sphericalangle\ \delta = 90^0$, also $\cos \delta = 0$ sein. Somit erhält man:

$$0 = \cos a \cos \lambda + \cos b \cos \mu + \cos c \cos \nu.$$

Setzt man sofort die oben entwickelten Werthe der Cosinusse in diese Gleichung, so erhält man endlich

$$XL + YM + ZN = 0.$$

Diese Gleichung drückt also die Bedingung einer einzigen Mittelkraft des Systems aus, wie oben schon gefunden wurde.

Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten.

§. 50.

Es gibt ein einfaches allgemeines Gesetz, wornach sich alle Aufgaben der Statik lösen lassen, und dieses ist das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Wir wollen annehmen, an den fest mit einander verbundenen Punkten A′, A″, A‴,... Fig. 40, wirken die Kräfte P′, P″, P‴... Denken wir uns nun das System mache eine Bewegung so zwar, daß die Angriffspunkte die unendlich kleinen geraden oder krummen Linien A′B′, A″B″, A‴B‴,... beschreiben, und die Richtungen der Kräfte in der zweiten Lage parallel bleiben denen in der ersten Lage. Fällt man nun die Perpendikel von den Angriffspunkten in der zweiten Lage auf die ursprünglichen Kraftrichtungen, so nennt man die Projectionen A′C′, A″C″, A‴C‴,... jener Linien auf die Kraftrichtungen die virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspunkte der Kräfte.

Man kann sich auch vorstellen, daß jede Kraft ihren Angriffspunkt einer auf ihrer Richtungslinie normal stehenden Ebene zu nähern suche. Die Größe der Annäherung des Angriffspunktes gegen diese Ebene ist alsdann der Weg der Kraft, die virtuelle Ge-

schwindigkeit des Punktes. Wird der Punkt der Ebene wirklich näher gebracht, so ist die virtuelle Geschwindigkeit positiv, entfernt er sich von ihr, so ist sie negativ. Sie ist Null, wenn weder eine Annäherung noch Entfernung stattfindet. Die virtuellen Geschwindigkeiten werden also das positive Zeichen erhalten müssen, wenn sie nach der Richtung genommen sind, nach welcher die Kraft den Angriffspunkt zu bewegen strebt, wie $A'C'$, $A'''C'''$..., während die in entgegengesetzter Richtung auf der Rückverlängerung der Kraftrichtung abgeschnittenen das negative Zeichen erhalten müssen wie $A''C'''$ . . . .

Werden die virtuellen Geschwindigkeiten der Kräfte der Reihe nach mit w', w'', w''',... bezeichnet, so nennt man die Producte $P'w'$, $P''w''$, $P'''w'''$ . . . die virtuellen Momente. Man hat dann für jede nur denkbare Art der erwähnten Bewegung folgende allgemeine Gleichung:

$$P'w' + P''w'' + P'''w''' + \ldots = 0.$$

Diese Gleichung drückt das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten aus, welches folgendermaßen heißt:

Wenn Kräfte, die beliebig auf ein System von Punkten wirken, unter einander im Gleichgewicht sind, so ist die algebraische Summe der virtuellen Momente gleich Null, und umgekehrt: Wenn für jede denkbare unendlich kleine Bewegung des Systems die algebraische Summe der virtuellen Momente gleich Null ist, so findet auch Gleichgewicht unter den Kräften statt.

§. 51.

Beweis für fortschreitende Bewegung. Wir nehmen zuerst an die Kräfte P', P'', P''', P^{IV} . . . wirken an einem Punkte A nach den beliebigen Richtungen AB, AC, AD, AE . . und seien mit einander im Gleichgewicht. Das System mache nun eine fortschreitende Bewegung, so daß der Angriffspunkt nach A' komme, und dabei den Weg $AA' = l$ zurücklege, die Kräfte aber dabei ihren anfänglichen Richtungen parallel bleiben, und $A'B'$, $A'C'$, $A'D'$, $A'E'$ die nunmehrigen Lagen der Kraftrichtungen darstellen. Fällt man nun aus A' die Perpendikel $A'b$, $A'c$, $A'd$, A,e auf die anfänglichen Kraftrichtungen, so sind $Ab = w'$, $Ac = w''$, $Ad = w'''$, $Ae = w^{IV}$ die virtuellen Geschwindigkeiten der genannten Kräfte. Bezeichnet man die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte mit der Linie AA' bilden, der Reihe nach mit α', α'', α''' . . . so ist $w' = l\cos\alpha'$, $w'' = l\cos\alpha''$, $w''' = l\cos\alpha'''$ . . . Da aber die Kräfte im Gleichgewicht sind, so kann die angenommene Bewegung nicht stattfinden. Es findet daher die Bedingungsgleichung nach §. 29 statt:

$$P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + P'''\cos\alpha''' + \ldots P^n\cos\alpha^n = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit l, so folgt:

$$P'\,l\cos\alpha' + P''\,l\cos\alpha'' + P'''\,l\cos\alpha''' + \ldots P^n\,l\cos\alpha^n = 0.$$

Substituirt man in diese Gleichung die Werthe von $l\cos\alpha'$, $l\cos\alpha''$ . . . , so erhält man:

$$P'w' + P''w'' + P'''w''' + \ldots\ldots P^n w^n = 0.$$

Hieraus folgt auch, daß der Weg l bei der fortschreitenden Bewegung beliebig groß sein kann.

§. 52.

Wirken die Kräfte P', P'', P''' .... P^n an verschiedenen fest mit einander verbundenen Angriffspunkten, so lasse man das System nach der Richtung einer der drei rechtwinkeligen Coordinatenaxen eine Bewegung machen. Dabei werden alle Angriffspunkte die Länge l durchlaufen. Sind nun α', α'', α''' ... die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte mit dieser Axe bilden, so muß für den Zustand des Gleichgewichts nach §. 47 stattfinden:

$$P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + P''' \cos \alpha''' + \ldots P^n \cos \alpha^n = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit l, so folgt

$$P' l \cos\alpha' + P'' l \cos\alpha'' + P''' l \cos\alpha''' + \ldots P^n l \cos\alpha^n = 0.$$

Nun ist aber $l \cos \alpha' = w'$, $l \cos \alpha'' = w''$, $l \cos \alpha''' = w'''$ .... daher erhält man auch

$$P'w' + P''w'' + P'''w''' + \ldots P^n w^n = 0.$$

§. 53.

Beweis für drehende Bewegung. Wenn eine beliebige Anzahl Kräfte im Raume an verschiedenen Angriffspunkten und nach beliebigen Richtungen wirkt, so führe man normal zur Dreharе eine Ebene und versetze sämmtliche Angriffspunkte der Kräfte in diese Ebene. Hierauf zerlege man jede Kraft in zwei rechtwinkelige Seitenkräfte, wovon eine in die Ebene selbst zu liegen kommt, die andere aber parallel zur Drehare gerichtet ist. Letztere Seitenkräfte haben auf Drehung keinen Einfluß, und können daher unberücksichtigt bleiben. Es sind demnach nur die in der Ebene liegenden Kräfte zu betrachten. Beweisen wir daher das Prinzip für Kräfte, die in einer Ebene liegen, so sehen wir ein, daß dieß auch gilt allgemein für die Kräfte im Raum.

Es seien nun, Fig. 42, P', P'', P''' ... die Kräfte, welche in einer Ebene an den festen geraden Linien AB, AC, AD ... wirken, und Drehung um den Punkt A hervorzubringen suchen. Ihre Angriffspunkte seien B, C, D...; ihre Hebelsarme $AF' = p'$, $AF'' = p''$, $AF''' = p'''$ ... Denken wir uns nun, das System drehe sich um den unendlich kleinen Winkel BAB', CAC', $DAD' = \varphi$, so werden die unendlich kleinen Bogen BB', CC', DD' ..., welche die Angriffspunkte der Kräfte beschreiben, als gerade Linien betrachtet werden können. Fällt man nun die Perpendikel $B'b$, $C'c$, $D'd$... von den Angriffspunkten in der zweiten Lage auf die ursprünglichen Kraftrichtungen, so sind $Bb = w'$, $Cc = w''$, $Dd = w'''$ .... die virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspunkte der Kräfte. Wenn nun, wie vorausgesetzt wird, die Kräfte im Gleichgewicht sind, und die gedachte Drehung nicht stattfinden soll, so muß nach §. 33 die Gleichung stattfinden:

$$P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots\ldots P^n p^n = 0.$$

Es ist nun $\triangle BB'b \sim \triangle AF'B$, woraus folgt:

$$AB:AF' = BB':Bb$$

$$AB:AF' = AB.\varphi:Bb$$

oder $$1:p' = \varphi:w'$$

also $$p' = \frac{w'}{\varphi}.$$

Auf ähnliche Art findet man $p'' = \frac{w''}{\varphi}$; $p''' = \frac{w'''}{\varphi}$ ....

Substituirt man diese Werthe in obige Gleichung, so erhält man:

$$P'\frac{w'}{\varphi} + P''\frac{w''}{\varphi} + \frac{P'''w'''}{\varphi} + \ldots \frac{P^n w^n}{\varphi} = 0$$

oder:

$$P'w' + P''w'' + P'''w''' + \ldots P^n w^n = 0.$$

Zweites Kapitel.

Vom Schwerpunkt.

§. 54.

Einleitung. Alle Körper haben, wie die Erfahrung lehrt, das Bestreben sich dem Mittelpunkte der Erde zu nähern, und wenn diesem Bestreben kein Hinderniß entgegengesetzt wird, so bewegen sie sich wirklich gegen denselben oder sie fallen, findet aber ein solches Hinderniß statt, so hört dieses Bestreben dennoch nicht auf. Die Ursache hievon ist eine in der ganzen Natur verbreitete Kraft, welche im Allgemeinen Anziehungskraft, Gravitation genannt wird. Eine solche Anziehungskraft besitzt nun auch unsere Erde, wie alle Weltkörper. Sie heißt hier insbesondere die Erdschwere, Schwerkraft.

Die Richtung der Schwerkraft oder die gerade Linie, in welcher die Körper frei fallen, heißt lothrecht oder vertical. Jede Ebene durch eine solche Linie heißt eine Verticalebene, und die Ebene, auf welcher die lothrechte Linie normal steht, heißt eine Horizontalebene.

§. 55.

Absolutes Gewicht. Wenn man einen Körper durch eine horizontale Unterlage unterstützt, oder an einen Faden aufhängt, so übt er wegen der beständig auf ihn wirkenden Schwerkraft einen Druck gegen seine Unterlage oder einen Zug gegen den Faden aus. Dieser Druck oder Zug heißt sein absolutes Gewicht.

Zur Vergleichung der verschiedenen Gewichte der Körper wird ein bestimmtes Gewicht als Einheit angenommen. Diese Einheit ist in den verschiedenen Ländern nicht gleich. In Frankreich nimmt man hierzu das Gewicht eines Kubikdecimeters destilirten Wassers bei 3,5⁰ R., oder 4,1⁰C., und heißt dasselbe Kilogramm. Im Badischen

ist die Gewichtseinheit das Pfund und ist der 54ste Theil vom Gewichte eines Kubikfußes Wasser von derselben Eigenschaft.

Wenn ein an einem Faden frei hängender Körper nicht fallen soll, so muß er mit einer Kraft gehalten werden, welche offenbar dem Gewichte des Körpers gleich sein muß. Es ist sonach leicht einzusehen, wie man alle Kräfte mit der Schwerkraft vergleichen und diese als Maß benutzen kann.

§. 56.

Specifisches Gewicht. Je mehr materielle Theile in dem Volumen eines Körpers enthalten sind, desto dichter ist er. Einen Körper, der überall gleiche Dichtigkeit hat, nennt man einen homogenen Körper. Je dichter ein Körper ist, desto größer ist das Gewicht einer Volumeneinheit desselben. Kennt man das Gewicht einer Volumenseinheit oder die Dichte des Körpers, so läßt sich sein absolutes Gewicht berechnen. Ist J der Inhalt, γ das Gewicht einer Kubikeinheit, P das Gewicht, so hat man $P = J\gamma$,
haben P', J' dieselbe Bedeutung für einen andern Körper derselben Materie und Dichtigkeit, so ist auch

$$P' = J'\gamma.$$

Aus beiden Gleichungen ergibt sich:

$$P : P' = J : J'$$

d. h. die Gewichte verhalten sich wie die Inhalte.

Von dem absoluten Gewichte ist das specifische Gewicht zu unterscheiden. Man versteht darunter die Verhältnißzahl zwischen dem Gewichte eines beliebigen Volumens eines Körpers und dem Gewichte eines gleich großen Volumens eines andern zur Vergleichung angenommenen Körpers. Das Wasser ist zur Vergleichung der festen und flüssigen Körper gewählt, die atmosphärische Luft für die Gasarten.

Bedeutet Π das Gewicht einer Kubikeinheit Wasser, α das specifische Gewicht, so ist $\gamma = \alpha\Pi$, also

$$P = J\alpha\Pi.$$

Für badisches Maß und Gewicht ist $\Pi = 54$ Pfd., für Meter $\Pi = 1000$ Kilogramm.

Tabelle der specifischen Gewichte verschiedener Körper.

1. Feste Körper.

Namen.	Specifisches Gewicht.	Namen.	Specifisches Gewicht.
Ahornholz	0,65 bis 0,69	Bausteine, im Mittel .	2,5
Alabaster	2,70	Bernstein	1,06 bis 1,09
Antimon	6,65 „ 6,72	Bimsstein	0,91 „ 1,65
Apfelbaumholz . . .	0,67 „ 0,79	Birkenholz	0,60 „ 0,80
Arsenik	5,63 „ 5,96	Birnbaumholz	0,65 „ 0,73
Asphalt	1,07 „ 1,16	Blei	11,33 „ 11,45
Basalt	2,72 „ 2,86	Buchenholz	0,63 „ 0,85

Namen.	Specifisches Gewicht.	Namen.	Specifisches Gewicht.
Butter	0,943	Kreide, weiße	1,8 bis 2,66
Ebenholz	0,80 bis 1,33	Kupfer, gegossen	8,59 „ 8,90
Eichenholz	0,62 „ 0,85	„ gehämmert	8,88 „ 9,00
Eis	0,916 „ 0,927	„ in Draht	8,78 „ 8,95
Eisen, geschmiedet	7,788	Lehm	1,52 „ 2,85
„ gegossen	7,0 „ 7,207	Lerchenholz	0,473 „ 0,565
„ in Draht	7,6 „ 7,75	Lindenholz	0,559 „ 0,604
Elfenbein	1,80 „ 1,92	Mahagonyholz	0,563 „ 1,063
Erde	1,36 „ 2,40	Marmor	2,52 „ 2,85
Erlenholz	0,42 „ 0,68	Mauerwerk von Bruchstein	2,40 „ 2,46
Fette	0,92 „ 0,94	„ „ Sandsteinen	2,05 „ 2,12
Feuerstein	2,58 „ 2,59	„ „ Ziegelsteinen	1,47 „ 1,70
Fichtenholz	0,38 „ 0,79	Mehl von Weizen	1,56
Franzosenholz (Guajak)	1,33	Messing, gegossen	8,40 „ 8,71
Glas, Bouteillen-	2,73	„ in Blech	8,52 „ 8,62
„ Krystall-	2,89	„ in Draht	8,34 „ 8,73
„ Flint-	3,20 „ 3,78	Platin	20,9 „ 21,5
Glockenmetall	8,81	Porphyr	2,4 „ 2,49
Gold, gediegen	14,6 „ 19,1	Porzellan	2,38 „ 2,49
„ gegossen	19,25	Quarz (siehe Kieselsteine)	
„ gehämmert	19,5	Roggen in Masse	0,776
Granit	2,50 „ 3,05	Sand, fein und trocken	1,40 „ 1,64
Holz, Laubholz, trocken, im Mittel	0,659	„ „ „ feucht	1,90 „ 1,95
„ Laubh., mit Wasser gesättigt	1,110	„ grob	1,37 „ 1,49
		Sandstein	1,90 „ 2,70
„ Nadelholz, trocken, im Mittel	0,453	Silber, gegossen	10,10 „ 10,47
		„ gehämmert	10,51 „ 10,62
„ Nadelh., mit Wasser gesättigt	0,839	Stahl, Cementstahl	7,26 „ 7,80
		„ gefrischt	7,50 „ 7,81
Holzkohle, von Nadelholz	0,28 „ 0,44	„ Gußstahl	7,83 „ 7,92
„ „ Eichenholz	0,573	Steinkohlen	1,21 „ 1,51
Kalk, gebrannt	2,3 „ 3,18	Tannenholz	0,49 „ 0,75
Kalkmörtel	1,64 „ 1,86	Thon	1,80 „ 2,63
Kalkstein	2,46 „ 2,84	Thonschiefer	2,76 „ 2,88
Kieselsteine, Quarz	2,3 „ 2,7	Ziegelstein, gemeiner	1,40 „ 2,20
Kirschbaumholz	0,577 „ 0,715	Zink, gegossen	6,86 „ 7,22
Kochsalz	2,10 „ 2,17	„ gewalzt	7,19 „ 7,86
Korkholz	0,240	Zinn	7,29 „ 7,47

2. Tropfbare und elastische Flüssigkeiten.

Aether, bei 20° C.	0,716	Kohlensaures Gas	1,524
Alkohol, absoluter, bei 20° C.	0,792	Kohlenwasserstoffgas	
Bier	1,023 „ 1,034	1) ölbildendes	0,985
Milch	1,02 „ 1,04	2) Grubengas	0,559
Baumöl, bei 12°	0,919	Quecksilberdämpfe	6,976 „ 7,03
Quecksilber bei 0°	13,550 „ 13,575	Sauerstoffgas	1,103
„ gegen Wasser bei 0°	13,598	Schwefelsaure Dämpfe	3,01
Seewasser	1,02 „ 1,04	Schwefelsaures Gas	2,247
Wasser, destillirtes	1,000	Steinkohlengas	0,5 „ 0,6
Wein, Rheinwein	0,992 „ 1,002	Stickstoffgas	0,976
Atmosphärische Luft	1,000	Wasserdampf bei 100°	0,624
Kohlenoxydgas	0,941	Wasserstoffgas	0,0688.

Beispiel 1. Was wiegt eine Stange von Schmiedeisen, welche 0,3 Fuß breit, 0,2 Fuß dick und 12 Fuß lang ist?

Aufl. Es ist $J = 0,3 . 0,2 . 12 = 0,720$ Kubikfuß; $\alpha = 7,788$; $\Pi = 54$, also $P = 0,720 . 7,788 . 54 = 420,552$ Pfund.

Beispiel 2. Wie schwer wiegt eine 16 Fuß hohe Säule aus Marmor, deren Durchmesser 1,5 Fuß beträgt?

Aufl. Es ist $J = \frac{(1,5)^2 . 3,14}{4} . 16 = 28,260$ Kbkfß.; $\alpha = 2,85$; also $P = 28,260 . 2,85 . 54 = 4349$ Pfd.

§. 57.

Schwerpunkt. Da die Gewichte aller Theile eines Körpers vertical abwärts wirken und ihre Richtungen als parallel angesehen werden können, so kann man den Körper als ein System von parallelen Kräften betrachten, deren Mittelkraft das Gewicht des ganzen Körpers repräsentirt. Diese Mittelkraft geht (§. 37) stets durch denselben Punkt, in welche Lage man auch den Körper bringen mag. Dieser Punkt, welcher also in dem Körper eine unveränderliche Lage hat, heißt der Mittelpunkt der Schwere, der Schwerpunkt des Körpers.

Wird der Schwerpunkt unterstützt oder festgehalten, dann ist der Körper im Gleichgewicht.

Jede den Schwerpunkt enthaltende Linie heißt Schwerlinie, und jede Ebene, welche denselben enthält, heißt Schwerebene.

Der Schwerpunkt ist bestimmt durch den Durchschnitt zweier Schwerlinien, oder durch den Durchschnitt einer Schwerlinie mit einer Schwerebene, oder endlich durch den Durchschnitt dreier Schwerebenen.

Bei manchen Körpern, z. B. bei Ringen, fällt der Schwerpunkt außerhalb der Masse. Bei regelmäßigen Räumen fällt er mit dem Mittelpunkt zusammen, z. B. bei dem Würfel, Kreise, der Kugel. Symetrische Räume haben ihren Schwerpunkt in der Axe oder Ebene der Symetrie.

Um den Schwerpunkt durch Rechnung zu bestimmen, bedienen wir uns der in §. 37 entwickelten Gleichungen. Da bei homogenen Körpern, wie wir sie voraussetzen, die Gewichte den Inhalten proportional sind, so können wir statt der Gewichte die Inhalte setzen.

Es seien nun $i', i'', i''', \ldots$ die Inhalte oder Volumina der einzelnen Theile des Körpers; $x', y', z'; x'', y'', z''; \ldots$ die Abstände ihrer Schwerpunkte von drei rechtwinkeligen Coordinatenebenen; J der Inhalt des ganzen Körpers, x, y, z die Abstände seines Schwerpunktes von denselben Ebenen, so hat man die Gleichungen:

$$Jx = i' x' + i'' x'' + i''' x''' + \ldots$$
$$Jy = i' y' + i'' y'' + i''' y''' + \ldots$$
$$Jz = i' z' + i'' z'' + i''' z''' + \ldots$$

Das Moment des ganzen Körpers in Bezug auf eine Ebene ist also gleich der Summe der Momente der einzelnen Theile in Bezug auf dieselbe Ebene.

Aus obigen Gleichungen finden sich dann leicht die Coordinaten des Schwerpunktes:

$$x = \frac{\Sigma\,(ix)}{J}$$

$$y = \frac{\Sigma\,(iy)}{J}$$

$$z = \frac{\Sigma\,(iz)}{J}.$$

Schwerpunkte der Linien.

§. 58.

Schwerpunkt einer geraden Linie. Der Schwerpunkt einer geraden Linie liegt in ihrer Mitte. Denn theilt man sie von der Mitte aus nach beiden Seiten in gleich viele unendlich kleine gleiche Elemente, so haben alle gleiches Gewicht und dem Momente eines jeden auf der einen Seite correspondirt ein gleiches auf der andern Seite. Diese Momente werden sich in jeder Lage der Linie das Gleichgewicht halten, wenn die Mitte unterstützt ist.

§. 59.

Schwerpunkt eines Kreisbogens. Es sei Fig. 43 AB = b ein schwerer Kreisbogen, C dessen Mittelpunkt, CD = r der Radius und AB = a die dazu gehörige Sehne. Der Schwerpunkt liegt jedenfalls in dem Radius CD, welcher den Kreisbogen in D halbirt. Es ist daher nur noch der Abstand z desselben vom Centrum zu bestimmen. Man ziehe nun durch C die Linie MN parallel AB, theile den Kreisbogen in seine Elemente BE, EF . . ., so daß jedes derselben als gerade Linie betrachtet werden kann. Von ihren Schwerpunkten G, H, . . fälle man die Perpendikel GJ, HK . . . auf MN, sowie ferner Ee, Ff . . perpendikulär und LE parallel zu AB. Alsdann ziehe man die Radien CG, CH . . Man beziehe nun die Momente auf MN, so hat man die Gleichung:

$$bz = BE \,.\, GJ + EF \,.\, HJ + \ldots.$$

Nun ist $\triangle$ BEe $\sim$ $\triangle$ CGJ, daher

$$GC : GJ = BE : Be$$
$$r : GJ = BE : Be$$

oder

$$r \,.\, Be = BE \,.\, GJ.$$

Ferner ist $\triangle$ EFL $\sim$ $\triangle$ CHK, also verhält sich

$$HC : HK = FE : EL$$
$$r : HK = FE : ef$$

oder

$$r \,.\, ef = HK \,.\, FE \text{ u. s. w.}$$

Substituirt man die erhaltenen Werthe in obige Gleichung, so erhält man:

$$bz = r \,.\, Be + r \,.\, ef + \ldots$$
$$bz = r\,(Be + ef + \ldots)$$

Die Summe der in der Klammer befindlichen Glieder ist aber gleich der ganzen Sehne AB = a, daher folgt

$$bz = ra$$

und daraus $$z = \frac{ra}{b} \;...\; 1.$$

Setzt man den Bogen für den halben Centriwinkel DCB = δ auf den Radius = 1 bezogen, so ist $b = r\delta$; $a = r \sin \delta$. Setzt man diese Werthe in obige Gleichung, so wird

$$z = r \cdot \frac{\sin \delta}{\delta} \;...\; 2.$$

Für den Halbkreisbogen wird $\delta = \frac{1}{2}\pi$; $\sin \delta = \sin \frac{1}{2}\pi = 1$, demnach erhält man den Abstand des Schwerpunktes eines Halbkreisbogens vom Centrum:

$$z = \frac{2r}{\pi} = 0{,}6366 \,.\, r \;...\; 3.$$

Für den ganzen Kreisbogen wird $\delta = \pi$, $\sin \delta = \sin \pi = 0$, daher der Abstand des Schwerpunktes vom Centrum:

$$z = \frac{r0}{\pi} = 0 \;...\; 4$$

d. h. der Schwerpunkt fällt mit dem Centrum zusammen.

Schwerpunkte ebener Flächen.

§. 60.

Schwerpunkt eines Dreiecks. Halbirt man die Seite AB des Dreiecks ABC, Fig. 44, in D und zieht DC, so halbirt diese Linie die Dreiecksfläche und ist zugleich eine Schwerlinie, da auf beiden Seiten sich gleich viele gleiche Momente nachweisen lassen, deren algebraische Summe in Bezug auf diese Linie gleich Null ist. Sie muß also den Schwerpunkt des Dreiecks enthalten. Aus demselben Grunde enthält die durch die Mitte E der Seite BC gehende Halbirungslinie AE den Schwerpunkt des Dreiecks. Der Durchschnittspunkt S beider Linien muß sofort der Schwerpunkt des Dreiecks sein. Zieht man die Linie DE, so ist $\triangle$ SDE $\sim$ $\triangle$ ASC. Daher verhält sich:

$$DE : AC = SD : SC.$$

Nun ist $DE = \frac{1}{2} AC$, also auch $SD = \frac{1}{2} SC$, folglich $SD = \frac{1}{3} DC$. Der Schwerpunkt eines Dreiecks liegt also in $\frac{1}{3}$ der Linie, welche die Mitte einer Seite mit der gegenüberliegenden Spitze verbindet.

Zieht man die Höhe CF = h und fällt vom Schwerpunkt das Perpendikel SG = z auf die Grundlinie, so ist $\triangle$ SDG $\sim$ $\triangle$ DCF, daher verhält sich:

$$DS : DC = SG : CF$$
$$DS : DC = SG : h$$

Nun ist $DS = \frac{1}{3} DC$ daher $SG = \frac{1}{3} h$ oder

$$z = \frac{1}{3} h$$

d. h. der Abstand des Schwerpunktes von der Grundlinie ist gleich ein Drittel der Höhe.

§. 61.

Schwerpunkt eines Parallelogramms. Denkt man sich mit der Diagonale BC des Parallelogramms ABDC, Fig. 45, unendlich viele Parallellinien gezogen, wodurch das Parallelogramm in unendlich schmale Streifen oder Elemente fg zerlegt wird, so werden sämmtliche Elemente durch die Diagonale AD halbirt. Es liegen also die Schwerpunkte aller Elemente in dieser Diagonale, sie ist also eine Schwerlinie. Deßgleichen ist die Diagonale BC eine Schwerlinie. Der Durchschnittspunkt S beider Diagonalen ist somit der Schwerpunkt des Parallelogramms. Ist Z der Abstand desselben von der Grundlinie und h die Höhe, so hat man:

$$z = \frac{1}{2} h$$

d. h. der Abstand des Schwerpunktes eines Parallelogramms von der Grundlinie ist gleich der halben Höhe desselben.

§. 62.

Schwerpunkt eines Paralleltrapezes. Es sei ABCD, Fig. 46, das Paralleltrapez. $AB = a$, $CD = b$ die parallelen Seiten. Das Perpendikel $CE = h$ die Höhe; $AE = c$. Auf AB ziehe man aus A die Normale AH und bezeichne mit x den Abstand des Schwerpunktes von AB und mit y den Abstand desselben von AH. Man ziehe nun die Linie CG parallel zu BD, dadurch wird das Paralleltrapez zerlegt in zwei Theile, das $\triangle$ ACG und das Parallelogramm CGBD, von welchen die Schwerpunktslagen bekannt sind. Wendet man nun die Gleichung an:

$$Jx = i' x' + i'' x'' + \ldots$$

so ist: $J = (a + b) \frac{h}{2}$; $i' = \triangle ACG = \frac{AG . CE}{2} = (a - b) . \frac{h}{2}$; $x' = \frac{h}{3}$; $i'' = CGBD = b . h$, $x'' = \frac{h}{2}$. Substituirt man diese Werthe in obige Gleichung, so erhält man:

$$(a + b) \frac{h}{2} . x = (a - b) \frac{h}{2} . \frac{h}{3} + bh . \frac{h}{2}$$

und hieraus:

$$x = \frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2b}{a + b} \; . \; . \; . \; 1.$$

Um nun y zu finden, fälle man das Perpendikel DF und betrachte das Paralleltrapez, bestehend aus den drei Theilen AEC, CEFD und DFB. Die Abstände der Schwerpunkte dieser Theile in Bezug auf AH sind aber bekannt. Wenden wir jetzt die Gleichung an

$$J \, . \, y = i' \, y' + i'' \, y'' + i''' \, y'''.$$

Hier ist $J = (a + b) \frac{h}{2}$; $i' = AEC = \frac{c \, . \, h}{2}$; $y' = \frac{2c}{3}$; $i'' = CEFD = bh$; $y'' = c + \frac{b}{2}$; $i''' = DFB = (a - b - c) \, . \, \frac{h}{2}$, $y''' = c + b + \frac{a - b - c}{3}$. Substituirt man diese Werthe in vorige Gleichung, so erhält man:

$$(a+b) \frac{h}{2} \, . \, y = \frac{c^2 h}{3} + bh \, . \left(c + \frac{b}{2}\right) + (a - b - c) \frac{h}{2} \, . \left(c + b + \frac{a - b - c}{3}\right).$$

Hieraus folgt:

$$y = \frac{a^2 + b^2 + a(b + c) + 2bc}{3(a+b)} \; . \; . \; . \; 2.$$

Ist Winkel CAB = 90^0, so wird c = 0 und man erhält:

$$y = \frac{a^2 + ab + b^2}{3(a+b)} \; . \; . \; . \; 3.$$

§. 63.

Schwerpunkt eines beliebigen Vierecks. Man theile das Viereck ABCD, Fig. 47, durch die Diagonale AC in die beiden Dreiecke ADC und ACB, suche ihre Schwerpunkte a, b und verbinde diese durch die Linie ab, so muß sie den Schwerpunkt des Vierecks enthalten. Sodann ziehe man die andere Diagonale DB und suche die Schwerpunkte d, c der hierdurch entstandenen Dreiecke. Die Verbindungslinie dc muß gleichfalls eine Schwerlinie sein. Die beiden Schwerlinien ab und dc schneiden sich im Punkte S, welcher sofort der verlangte Schwerpunkt ist.

§. 64.

Schwerpunkt eines Polygons. Um den Schwerpunkt eines Polygons zu finden, theile man dasselbe in Dreiecke und Vierecke. Bestimme die Schwerpunkte dieser Theile und die Abstände derselben von zwei in der Ebene der Figur angenommenen rechtwinkeligen Coordinatenaxen, beziehe die Momente der einzelnen Theile und des ganzen Polygons auf jede dieser Axen, so findet man durch Anwendung der Gleichungen des §. 57 die Abstände des Schwerpunktes von den Axen und somit die Lage des verlangten Schwerpunktes.

§. 65.

Schwerpunkt eines Kreissectors. Man zerlege den Kreissector ABC, Fig. 48, in unendlich viele Dreiecke, deren Spitzen in dem Centrum C liegen und deren Grundlinien zusammen den Bogen AB = b bilden. Es sei AC = r der Radius und AB = a die Sehne. Die Schwerpunkte sämmtlicher Elementardreiecke liegen alle $\frac{2}{3}$ r von C entfernt und bilden somit einen schweren Kreisbogen MN, dessen Schwerpunkt mit dem des Sectors zusammenfallen muß. Die zu MN gehörige Sehne ist aber $\frac{2}{3}$ a und der zugehörige Radius MC = $\frac{2}{3}$r. Durch Substitution dieser Werthe in Gleichung 1 §. 59 erhält man den Abstand des Schwerpunktes dieses schweren Kreisbogens und somit den des Sectors vom Centrum:

$$z = \frac{2}{3} \frac{r\,a}{b} \quad \ldots \; 1.$$

Es sei ferner δ der Bogen des halben Centriwinkels für den Radius = 1. Drückt man a, b mittelst desselben aus und setzt die erhaltenen Werthe in 1, so wird:

$$z = \frac{2}{3} \quad \frac{r \, . \sin \delta}{\delta} \quad \ldots \; 2.$$

Für den Halbkreis ist $\delta = \frac{1}{2} \pi$; $\sin \delta = \sin \frac{1}{2} \pi = 1$,

daher $$z = \frac{4 \, . \, r}{3 \, . \, \pi} = 0{,}4246 \, . \, r \quad \ldots \; 3.$$

Für die ganze Kreisfläche ist $\delta = \pi$, $\sin \delta = 0$, also

$$z = \frac{2}{3} \frac{r \, . \, 0}{\pi} = 0 \quad \ldots \; 4.$$

§. 66.

Schwerpunkt eines concentrischen Ringstücks. Es sei ABED, Fig. 49, das Ringstück, C das Centrum der Bogen AB und DE, AC = r, DC = ϱ. Der Schwerpunkt liegt jedenfalls in dem Radius FC, welcher das Ringstück halbirt. Man hat also nur noch den Abstand desselben vom Centrum zu finden. Es muß nun das Moment des Sectors ABC gleich sein dem Momente des Ringstücks mehr dem Moment des Sectors DEC. Bezeichnet also J den Inhalt des Ringstücks, z den Abstand seines Schwerpunktes von C und haben i', i''; z', z'' dieselbe Bedeutung für die Sectoren ABC,DEF, so muß die Gleichung stattfinden:

$$J z = i' z' - i'' z''.$$

Nun ist, wenn δ die bisherige Bedeutung hat: $i' = r^2 \delta$, $z' = \frac{2}{3} r . \frac{\sin\delta}{\delta}$; $i'' = \varrho^2 \delta$, $z'' = \frac{2}{3} \varrho \frac{\sin\delta}{\delta}$; $J = (r^2 - \varrho^2)\delta$, und wenn man diese Werthe substituirt, so erhält man:

$$(r^2 - \varrho^2)\delta . z = \frac{2}{3} r^3 \sin\delta - \frac{2}{3} \varrho^3 \sin\delta$$

und daraus:

$$z = \frac{2}{3} . \frac{r^2 + r\varrho + \varrho^2}{r + \varrho} . \frac{\sin\delta}{\delta} \quad . \; . \; . \; 1.$$

Für den halben Kreisring wird $\delta = \frac{\pi}{2}$, $\sin\delta = 1$, also

$$z = \frac{4}{3} . \frac{r^2 + r\varrho + \varrho^2}{(r + \varrho)\pi} \quad . \; . \; . \; 2.$$

§. 67.

Schwerpunkt eines Kreissegments. Es sei J der Inhalt des Segments ABD, Fig. 50, z der Abstand des Schwerpunktes desselben vom Centrum C. Ferner haben i', z'; i'', z'' dieselbe Bedeutung in Bezug auf den Sector DBC und das Dreieck ABC. Das Moment des Sectors muß nun gleich sein den Momenten der beiden Theile ABD und ABC, daher die Gleichung:

$$i' z' = Jz + i'' z''$$
$$Jz = i' z' - i'' z''.$$

Behalten a und b ihre bisherige Bedeutung, so ist $i' = \frac{b . r}{2}$, $z' = \frac{2}{3} \frac{ra}{b}$; $i'' = \frac{a . CE}{2}$; $CE = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$, also $i'' = \frac{a}{2} . \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$, $z'' = \frac{2}{3} . CE = \frac{2}{3} \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$, folglich erhält man durch Substitution in vorige Gleichung:

$$Jz = \frac{1}{3} a r^2 - \frac{1}{3} a \left(r^2 - \frac{a^2}{4}\right)$$

$$z = \frac{1}{12} . \frac{a^3}{J} \; . . . \; 1.$$

Für den Halbkreis wird $a = 2r$; $J = \frac{r^2\pi}{2}$ daher, wenn in 1 substituirt wird

$$z = \frac{4r}{3\pi} \quad . \; . \; . \; 2.$$

Schwerpunkte krummer Flächen.

§. 68.

Schwerpunkt eines Cylindermantels. Denkt man sich den Cylindermantel durch Parallelschnitte mit seiner Grundfläche in

unendlich viele kreisförmige Elemente geschnitten, so liegen die Schwerpunkte derselben in ihren Mittelpunkten, somit in der geraden Linie, welche die Mittelpunkte beider Grundflächen verbindet, oder in der Axe EF, Fig. 51. Sie bilden also eine gleichförmig schwere Linie, welche ihren Schwerpunkt in ihrer Mitte S hat und welches sofort auch der Schwerpunkt des Cylindermantels ist. **Der Schwerpunkt eines Cylindermantels liegt also in der Mitte der Axe oder in seiner halben Höhe.**

§. 69.

Schwerpunkt eines senkrechten Kegelmantels. Zerlegt man den Kegelmantel, Fig. 52, in unendlich viele Dreiecke, deren Spitzen in die Spitze C des Kegelmantels fallen und deren Grundlinien die Peripherie desselben bilden, so bilden die Schwerpunkte sämmtlicher Dreiecke eine schwere Kreislinie DF, da sie alle gleich weit von der Peripherie abstehen. Der Schwerpunkt dieser Kreislinie fällt aber in ihren Mittelpunkt S, demnach in die Axe CE des Kegels. Nun ist aber $AD = \frac{1}{3} AC$, also auch $ES = \frac{1}{3} EC$, oder **der Schwerpunkt des Kegelmantels liegt in $\frac{1}{3}$ der Höhe von der Grundfläche entfernt.**

Zur Bestimmung des Schwerpunktes der gesammten Oberfläche des Kegels sei b die Seite, h die Höhe, r der Radius der Grundfläche, z der Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche. Nun ist in Beziehung auf die Grundfläche das Moment des Mantels $\frac{1}{3} h . rb\pi$, das Moment der Grundfläche Null. Der Inhalt der gesammten Oberfläche ist $rb\pi + r^2\pi$, daher:

$$(rb\pi + r^2\pi) Z = \frac{1}{3} h . rb\pi + 0$$

und daraus $$z = \frac{1}{3} h . \frac{b}{b + r} \ldots 1.$$

Den Abstand des Schwerpunktes von der Spitze des Kegels findet man

$$z' = \frac{h}{3} . \frac{2b + 3r}{b + r} \ldots 2.$$

§. 70.

Schwerpunkt einer Kugelhaube oder Kugelzone. Theilt man die krumme Oberfläche einer Haube oder Zone ADBC, Fig. 53, durch unendlich nahe liegende mit der kreisförmigen Basis ADBE parallel laufende Ebenen in Zonen von unendlich kleinen, aber gleichen Höhen, so haben sie auch alle gleiche Oberfläche. Alle diese Elemente sind nun Cylindermäntel, die ihre Schwerpunkte in der Mitte ihrer

Axen haben, welche aber sämmtlich in der im Mittelpunkt G der Grundfläche ADBE errichteten Normalen GC oder in der Axe der Haube liegen. Da aber alle Elemente gleichen Inhalt oder gleiches Gewicht haben, so ist diese Axe eine gleichmäßig schwere Linie, deren Schwerpunkt sofort in ihre Mitte S fällt. **Der Schwerpunkt einer Kugelhaube oder Kugelzone liegt also in der halben Höhe oder in der Mitte der Axe derselben.**

Schwerpunkte der Körper.

§. 71.

Schwerpunkt eines prismatischen Körpers. Wenn man den prismatischen Körper durch Parallelschnitte zur Grundfläche in gleich hohe unendlich dünne Schichten oder Elemente zerlegt, so müssen die Schwerpunkte derselben in der geraden Linie liegen, welche die Schwerpunkte der beiden Grundflächen mit einander verbindet. Dieß ist aber die Axe, und nun eine gleichmäßig schwere Linie, deren Schwerpunkt in ihre Mitte fällt, welches somit der Schwerpunkt des Körpers ist. **Der Schwerpunkt eines prismatischen Körpers liegt also in der Mitte der Axe oder in seiner halben Höhe.**

Da man den Cylinder als ein Prisma von unendlich vielen Seiten betrachten kann, so gilt Obiges auch von einem Cylinder.

§. 72.

Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide. Es sei ABCD, Fig. 54, eine dreiseitige Pyramide, G der Schwerpunkt ihrer Grundfläche ABC. Theilt man die ganze Pyramide durch unendlich nahe liegende, mit der Grundfläche ABC parallele Schnitte in ihre Elemente, so erhält man lauter schwere ähnliche Dreiecke, deren Schwerpunkte sämmtlich in der Linie GD liegen, welche den Schwerpunkt der Grundfläche mit der Spitze verbindet. Die Linie GD ist also eine Schwerlinie, und muß den Schwerpunkt der Pyramide enthalten. Denkt man sich ferner die Pyramide durch Parallelschnitte mit der Fläche BCD ebenso in Elemente getheilt, und ist F der Schwerpunkt des Dreiecks BCD, so müssen die Schwerpunkte aller dieser Elemente in der Geraden AF liegen, welche den Schwerpunkt F mit der Ecke A verbindet. Die Linie AF ist daher gleichfalls eine Schwerlinie, und enthält den Schwerpunkt der Pyramide. Da nun beide Schwerlinien in der Ebene liegen, welche durch die Punkte A, E, D geht, so müssen sie sich in einem Punkte S schneiden, welches sofort der Schwerpunkt der Pyramide ist. Zieht man FG, so ist $\triangle\, GFS \sim \triangle\, ASD$, daher verhält sich:

$$GF : AD = GS : SD.$$

Nun ist aber $GF = \frac{1}{3}\, AD$, also auch $GS = \frac{1}{3}\, SD$, folglich:

$$GS = \frac{1}{4} GD.$$

Der Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide liegt somit in $\frac{1}{4}$ der Linie, welche den Schwerpunkt der Grundfläche mit der gegenüberliegenden Spitze verbindet. Denkt man sich die Höhe = h gezogen, und durch S eine Ebene parallel zu ABC gelegt, so schneidet sie die Höhe in einem Punkte, der $\frac{1}{4}$ h von der Grundfläche entfernt liegt.

Der Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide liegt also um ein Viertel ihrer Höhe von der Grundfläche entfernt.

§. 73.

Schwerpunkt einer vielseitigen Pyramide. Jede vielseitige Pyramide läßt sich in dreiseitige zerlegen, welche mit ihr dieselbe Spitze und gleiche Höhe haben. Da nun der Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide in $\frac{1}{4}$ der Höhe liegt, so liegen die Schwerpunkte dieser einzelnen Theile alle gleich hoch in derselben zur Grundfläche parallelen Ebene. Es muß sofort der Schwerpunkt der ganzen Pyramide ebenfalls in jener Ebene liegen, welche $\frac{1}{4}$ der Höhe von der Grundfläche entfernt liegt. Der Schwerpunkt einer vielseitigen Pyramide liegt folglich in $\frac{1}{4}$ der Höhe von der Grundfläche entfernt.

Man findet den Schwerpunkt, wenn man den Schwerpunkt G der Grundfläche mit der Spitze F verbindet, und die Linie GF, Fig. 55, in vier gleiche Theile theilt. Der erste Theilungspunkt S ist der verlangte Schwerpunkt.

Den Kegel kann man als eine vielseitige Pyramide ansehen. Es liegt somit der Schwerpunkt eines Kegels in $\frac{1}{4}$ seiner Höhe.

§. 74.

Schwerpunkt einer abgekürzten Pyramide. Es sei G der Inhalt der Grundfläche ABCDE, Fig. 56, G der Inhalt der damit parallelen Endfläche FGHKL, h der senkrechte Abstand beider Flächen, x die Höhe der Ergänzungspyramide; J der Inhalt der abgekürzten Pyramide, z der Abstand des Schwerpunktes derselben von der Grundfläche; i′ der Inhalt der ganzen Pyramide, z′ der Abstand ihres Schwerpunktes von der Grundfläche; i″ der Inhalt der Ergän-

zungspyramide, z'' der Abstand dessen Schwerpunktes von der Grundfläche. Man hat nun die allgemeine Gleichung:

$$Jz = i'z' - i''z''$$

hier ist $J = \frac{1}{3} h (G + \sqrt{Gg} + g)$; $i' = G . \frac{(h + x)}{3}$, $z' = \frac{(h + x)}{4}$;

$i'' = \frac{gx}{3}$; $z'' = \left(h + \frac{1}{4} x\right)$. Substituirt man diese Werthe in vorige Gleichung, so erhält man:

$$\frac{1}{3} h (G + \sqrt{Gg} + g) . z = \frac{1}{3} G (h + x) . \frac{(h + x)}{4} - \frac{1}{3} gx . \left(h + \frac{1}{4} x\right)$$

hieraus ergibt sich:

$$z = \frac{G (h + x)^2 - gx (4 h + x)}{4 h (G + \sqrt{Gg} + g)}.$$

Es ist aber $x = \frac{h \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$; wird dieser Werth für x in diese Gleichung eingeführt und gehörig reducirt, so folgt:

$$z = \frac{h}{4} . \frac{G + 2 \sqrt{Gg} + 3g}{G + \sqrt{Gg} + g} \quad . . . 1.$$

Werden die Halbmesser der beiden Grundflächen eines abgekürzten Kegels mit R und r bezeichnet, so ist $G = R^2 \pi$, $g = r^2 \pi$. Substituirt man diese Werthe für G und g in vorige Gleichung, so erhält man den Abstand des Schwerpunktes eines abgekürzten Kegels von seiner untern Grundfläche:

$$z = \frac{h}{4} . \frac{R^2 + 2 Rr + 3 r^2}{R^2 + Rr + r^2} \quad . . . 2.$$

§. 75.

Schwerpunkt eines Polyeders. Man zerlege den Körper in lauter Pyramiden, bestimme ihre Schwerpunkte und Inhalte, beziehe dann ihre Momente, sowie das des Polyeders auf drei rechtwinkelige Coordinatenebenen mit Anwendung der Gleichungen des §. 57, so findet man den Schwerpunkt des Polyeders.

§. 76.

Schwerpunkt eines Kugelsectors. Den Kugelsector kann man sich aus unendlich vielen Pyramiden bestehend denken, deren Grundflächen zusammen die Kugelhaube bilden, und deren Spitzen im Centrum der Kugel liegen. Es sei nun h die Höhe der Kugelhaube des Sectors, r der Kugelradius, z der Abstand des Schwerpunkts des Sectors vom Centrum. Der Schwerpunkt einer jeden der gedachten Elementarpyramiden liegt in $\frac{3}{4}$ r von der Spitze entfernt. Alle diese Schwerpunkte bilden somit eine schwere Kugelhaube, deren Radius

$\frac{3}{4}$ r und deren Höhe $\frac{3}{4}$ h ist. Der Schwerpunkt dieser Kugelhaube ist sofort auch der Schwerpunkt des Sectors. Mit Rücksicht auf §. 70 erhält man nun:

$$z = \frac{3}{4} r - \frac{1}{2} . \frac{3}{4} h$$

$$z = \frac{3}{8} (2r - h) \ . \ . \ . \ 1.$$

Für die Halbkugel wird h = r, also

$$z = \frac{3}{8} (2r - r)$$

$$z = \frac{3}{8} r \ . \ . \ . \ 2.$$

§. 77.

Schwerpunkt eines Kugelsegments. Es sei h die Höhe des Segments, r der zugehörige Kugelradius, z der Abstand des Schwerpunktes vom Centrum. Ergänzt man den Abschnitt zum Sector, so ist der Inhalt des Sectors $= \frac{2}{3} \pi r^2 h$; der Abstand seines Schwerpunktes vom Centrum $= \frac{3}{8} (2r - h)$; der Inhalt des Ergänzungskegels $= \frac{1}{3} . \pi (2r - h) h (r - h)$, der Abstand seines Schwerpunkts vom Centrum $= \frac{3}{4} (r - h)$; der Inhalt des Kugelsegments $= \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h)$. Man erhält dann auf die bekannte Weise:

$$z = \frac{\frac{2}{3} \pi r^2 h . \frac{3}{8} (2r - h) - \frac{1}{3} \pi h (2r - h)(r - h) . \frac{3}{4} (r - h)}{\frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h)}$$

$$z = \frac{3}{4} . \frac{(2r - h)^2}{3r - h} \ . \ . \ . \ 1.$$

Bezeichnet z′ den Abstand des Schwerpunktes vom Begrenzungskreis, so ist z′ = z — (r — h), daher erhält man:

$$z' = \frac{h}{4} . \frac{4r - h}{3r - h} \ . \ . \ . \ 2.$$

§. 78.

Praktische Bestimmung des Schwerpunktes. Hängt man den Körper an einem Faden in verschiedenen Lagen auf, so muß, wenn Ruhe eingetreten ist, die Richtung des Fadens jedesmal durch

den Schwerpunkt des Körpers gehen. Der Durchschnittspunkt der verschiedenen Richtungen ist alsdann der Schwerpunkt des Körpers.

Ein anderes Verfahren besteht darin, daß man den Körper in drei verschiedenen Positionen auf der scharfen Kante eines dreiseitigen Prismas in's Gleichgewicht bringt. Hierdurch bestimmen sich drei Verticalebenen, deren Durchschnittspunkt der Schwerpunkt des Körpers ist.

Man kann auch das eine äußerste Ende des Körpers auf eine horizontale scharfe Kante legen, das andere Ende mit der einen Wagschale einer Wage verbinden, und die andere Wagschale mit Gewichten belasten so lange, bis die Axe des Körpers horinzontal zu liegen kommt. Ist nun G das Gewicht des Körpers, x die Entfernung seines Schwerpunktes von der scharfen Drehkante, l die Länge, P das in die Wagschale gelegte Gewicht, so hat man:

$$Gx = Pl$$

also:

$$x = \frac{Pl}{G}.$$

Guldin's Regel.

§. 79.

Inhalt einer Rotationsfläche. Eine beliebige krumme oder gebrochene Linie AB, Fig. 57, drehe sich um die Axe MN, die mit ihr in derselben Ebene liegt. Zerlegt man diese Linie in Elemente AC, CD, DE, . . . die man als gerade Linien betrachten kann, so beschreiben sie bei der Umdrehung lauter abgekürzte Kegelmäntel. Es seien r', r'', r''', . . . die Perpendikel aus den Endpunkten der Elemente auf die Drehaxe MN; a, b, c, . . . die Längen der Theile AC, CD, DE, . . .; p', p'', p''', . . . die Perpendikel aus ihren Schwerpunkten auf die Drehaxe; J der Inhalt der erzeugten Oberfläche, L die Länge der ganzen Linie AB; z der Abstand ihres Schwerpunktes von der Axe MN. Es ist nun:

$$J = \frac{(r' + r'')}{2} . 2a\pi + \frac{(r'' + r''')}{2} . 2b\pi + \frac{(r''' + r^{IV})}{2} . 2c\pi + \ldots$$

$$J = 2\pi\left(\frac{r' + r''}{2} . a + \frac{r'' + r'''}{2} . b + \frac{r''' + r^{IV}}{2} . c + ..\right)$$

Es ist aber $\frac{r' + r''}{2} = p'$; $\frac{r'' + r'''}{2} = p''$, u. s. f., daher auch:

$$J = 2\pi\ (p'\,a + p''b + p'''\,c + \ldots).$$

Die in den Klammern enthaltenen Glieder dieser Gleichung sind nun die Momente der einzelnen Elemente in Bezug auf die Drehaxe. Dieser Summe muß aber das Moment der ganzen Linie gleich sein, daher ist:

$$Lz = p'a + p''b - p''c + \ldots$$

Setzt man diesen Werth in die obige Gleichung, so erhält man:

$$J = 2\,\pi\,zL\ .\ .\ .\ 1.$$

Hier ist nun $2\pi z$ der Weg, den der Schwerpunkt der Linie bei einer Umdrehung zurücklegt. Es folgt also:

Der Inhalt einer Rotationsfläche ist gleich der Länge der erzeugenden Linie multiplicirt mit dem Weg, den ihr Schwerpunkt zurücklegt.

Diese Regel gilt nicht nur für die ganze, sondern auch für theilweise Umdrehung. Ist bei einer theilweisen Umdrehung der zurückgelegte Bogen $\varphi < 2\pi$, so ist

$$J = \varphi z L \;.\;.\;.\; 2.$$

§. 80.

Inhalt eines Rotationskörpers. Der Körper, welcher durch Umdrehung der Ebene ABSG um die Axe MN entsteht, besteht aus lauter abgekürzten Kegeln. Bezeichnet K den Kubikinhalt dieses Körpers, und sind h', h'', h''', . . . die Höhen der Paralleltrapeze AGHC, CHJD, . . . also $GH = h'$; $HJ = h''$, . . . so ist

$$K = \frac{h'\pi}{3}(r'^2 + r'.r'' + r''^2) + \frac{h''\pi}{3}\,r''^2 + r''.r''' + r'''^2) + \ldots$$

Bedeuten ferner i', i'', i''' . . . die Flächeninhalte der einzelnen Paralleltrapeze; z', z'', z''' . . . die Perpendikel von ihren Schwerpunkten auf die Axe MN, so ist: $z' = \frac{1}{3}\left(\frac{r'^2 + r'.r'' + r''^2}{r' + r''}\right)$

$i' = \frac{h'}{2}(r' + r'')$; $2i'' = h'(r' + r'')$, also $2i'z' = \frac{h'}{3}$ $(r'^2 + r'.r'' + r''^2)$, deßgleichen $2i''z'' = \frac{h''}{3}(r''^2 + r''.r''' + r'''^2)$, u. s. f.

Substituirt man in obige Gleichung, so folgt:

$$K = 2\pi i' z' + 2\pi i'' z'' + 2\pi i''' z''' + \ldots$$

oder

$$K = 2\pi\,(i' z' + i'' z'' + i''' z''' + \ldots).$$

Nun ist aber:

$$Jz = i' z' + i'' z'' + i''' z''' + \ldots$$

daher folgt:

$$K = 2\pi z J \;.\;.\;.\; 1.$$

Es ist hier $2\pi z$ der Weg des Schwerpunktes der erzeugenden Fläche, somit folgt der Satz:

Der Inhalt eines Rotationskörpers ist gleich dem Producte aus dem Inhalt der erzeugenden Fläche in den Weg, welchen ihr Schwerpunkt zurücklegt.

Bei einer theilweisen Umdrehung um den Bogen $\varphi < 2\pi$ erhält man

$$K = \varphi z J \;.\;.\;.\; 2.$$

Das Verfahren, auf obige Weise den Inhalt einer Fläche oder

eines Körpers zu bestimmen, nennt man die Barycentrische Methode.

Aufgabe 1. Man soll die Kugeloberfläche berechnen.

Auflösung. Es ist hier, wenn der Durchmesser als Drehaxe angenommen wird, der Halbkreis die Erzeugungslinie $L = r\pi$; der Abstand des Schwerpunktes desselben von der Drehaxe $z = \frac{2r}{\pi}$. Setzt man diese Werthe in Gleichung 1 des §. 79, so erhält man den Inhalt der Kugeloberfläche:

$$J = 2\pi \,.\, r\pi \,.\, \frac{2r}{\pi} = 4r^2\pi.$$

Aufgabe 2. Man soll den Kubikinhalt einer Kugel vom Radius r bestimmen:

Auflösung. Es ist die halbe Kreisfläche die Erzeugungsfläche, also $J = \frac{r^2\pi}{2}$ $z = \frac{4r}{3\pi}$, somit nach Gl. 1 dieses §.

$$K = 2\pi \,.\, \frac{r^2\pi}{2} \,.\, \frac{4r}{3\pi} = \frac{4}{3} \,.\, r^3\pi.$$

Aufgabe 3. Man soll den Inhalt der durch Umdrehung des Halbkreises ADB um die Axe FE, Fig. 58, erzeugten Ringfläche bestimmen?

Auflösung. Es sei der Radius $DC = r$, $CG = R$. Der Abstand des Schwerpunktes der Linie ADB vom Kreismittelpunkt C ist $\frac{2r}{\pi}$, demnach der Abstand von der Drehaxe FE oder $z = R + \frac{2r}{\pi}$; $L = r\pi$, folglich:

$$J = 2\pi \,.\, r\pi \,.\left(R + \frac{2r}{\pi} \right) = 2r\pi \; (R\pi + 2r).$$

Der Inhalt der Oberfläche, welche durch Umdrehung der Figur FADBC um FE entstanden ist, wird sein

$$J = 2r\pi \; (R\pi + 2r) + 2R^2\pi.$$

Aufgabe 4. Man soll den durch die Umdrehung der Halbkreisfläche ABD um die Drehaxe FE erzeugten körperlichen Raum bestimmen.

Auflösung. Es ist hier der Inhalt der Erzeugungsfläche $J = \frac{r^2\pi}{2}$, der Abstand ihres Schwerpunktes von FE ist $z = R + \frac{4r}{3\pi}$ daher:

$$K = 2\pi \,.\, \frac{r^2\pi}{2} \,.\left(R + \frac{4r}{3\pi}\right) = \pi r^2 \left(R\pi + \frac{4r}{2}\right).$$

Drittes Kapitel.

Von der Stabilität fester Körper.

§. 81.

Gleichgewichtsarten. Wenn ein Körper, oder auch ein System von Körpern, durch irgend eine Kraft aus dem stattfindenden Gleichgewichtszustande in eine andere Lage gebracht wird, so sagt man, das Gleichgewicht desselben sei stabil, sicher, wenn die Rückkehr, nach Beseitigung jener Kraft, in die vorige Lage durch das eigene Gewicht wieder von selbst erfolgt. Entfernt er sich aber noch mehr von seiner ursprünglichen Lage, so sagt man, sein Gleichgewicht sei labil, unsicher. Findet aber weder das eine noch das andere Bestreben statt, so ist sein Gleichgewicht indifferent, er befindet sich im Zustande der völligen Gleichgültigkeit.

Wird ein Körper so festgehalten, etwa durch eine Drehare, daß der Schwerpunkt desselben unter oder über dieselbe zu liegen kommt, so wird er bei einer kleinen Drehung im ersten Falle wieder von selbst in seine ursprüngliche Lage zurückkehren, sein Gleichgewicht ist stabil; im andern Falle wird er die begonnene Drehung weiter fortsetzen und nicht mehr von selbst in seine vorige Lage zurückkehren, sein Gleichgewicht ist labil. Fällt aber der Schwerpunkt mit der Drehare zusammen, so wird er in jeder Lage in Ruhe bleiben, sein Gleichgewicht ist indifferent. Wird ein Ellipsoid zuerst mit seiner kleinen, dann mit seiner großen Are auf eine horizontale Ebene gestellt, so zeigt sich im ersten Falle stabiles, im andern labiles Gleichgewicht. Bei der Kugel ist das Gleichgewicht indifferent. Da der Schwerpunkt immer zu fallen strebt, so wird nur dann stabiles Gleichgewicht vorhanden sein, wenn er die möglichst tiefe Lage erreicht.

§. 82.

Stabilität. Man nennt das Vermögen des Körpers, durch sein Gewicht allein seine Stellung zu behaupten und einer Umdrehungsursache Widerstand entgegenzusetzen, seine Stabilität oder Standfähigkeit.

Ruht ein Körper mit seiner ebenen Basis auf einer horizontalen Unterlage, so wird er bei einer erfolgenden Drehung um eine Kante so lange Stabilität besitzen, als die Verticale aus dem Schwerpunkte noch die Unterstützungsfläche oder Basis trifft. Ist der Körper nur auf einigen Punkten gestützt, so bildet die Figur, welche durch die Verbindung der äußersten Stützpunkte entsteht, die Unterstützungsfläche. Fällt die Verticale außerhalb der Unterstützungsfläche, so hat der Körper keine Stabilität mehr, er fällt um.

Das Maß der Stabilität eines Körpers wird ausgedrückt durch das statische Moment seines im Schwerpunkt vereinigten Gewichts in

Bezug auf die Drehaxe. Betrachten wir einen prismatischen Körper ABCD, der mit einer Fläche auf der horizontalen Unterlage MN, Fig. 59, stehe und nehmen an, derselbe werde um den Winkel ABM $= \alpha$ um die Kante B gedreht. Das Perpendikel aus seinem Schwerpunkte S auf die Grundfläche AB sei SE $=$ h; die Entfernung des Fußpunktes E von der Drehaxe B sei EB $=$ a, das Gewicht des Körpers $=$ Q und die Stabilität $=$ S. Zieht man nun aus dem Schwerpunkte die Verticallinie SK, so trifft diese die Horizontalebene in K, daher BK der Hebelsarm des Gewichts, somit ist die Stabilität des Körpers für die bezeichnete Lage:

$$S = Q . BK.$$

Fällt man die Perpendikel EF auf SK und EL auf MN, so ist BK $=$ BL $-$ EF $=$ a cos α $-$ h sin α, daher auch

$$S = Q\,(a \cos \alpha - h \sin \alpha) \;.\;.\;.\; 1.$$

Aus dieser Gleichung lassen sich nun einige wichtige Folgerungen ziehen:

1. Wenn a größer oder kleiner wird, so wird auch die Stabilität S größer oder kleiner. Je weiter demnach die durch den Schwerpunkt gezogene Senkrechte von der Drehaxe entfernt ist, desto größer ist die Stabilität des Körpers und umgekehrt.

2. Wird h größer, so wird S kleiner und umgekehrt. Je höher also der Schwerpunkt über der Grundfläche liegt, desto kleiner ist die Stabilität des Körpers, und je näher er der Grundfläche liegt, desto größer ist dieselbe; oder im ersten Falle ist der Körper leichter der Gefahr des Umwerfens ausgesetzt, wie im andern.

3. So lange (a cos α $-$ h sin α) positiv ist, hat der Körper immer das Bestreben, in seine vorige Lage zurückzukehren, seine Stabilität ist positiv; wird aber dieser Werth negativ, also h sin $\alpha >$ a cos α, so wird auch S negativ, d. h. der Körper wird nicht mehr in seine ursprüngliche Stellung zurückkehren, sondern sich weiter davon entfernen. Wird a cos α $=$ h sin α, so wird S $=$ 0, der Schwerpunkt liegt dann senkrecht über der Drehaxe, und die geringste Kraft kann den Körper umwerfen oder ihn in seine frühere Stellung zurückbringen.

4. Wenn $\alpha = 0$ wird, so steht der Körper auf seiner horizontalen Grundfläche und es ist für diese Stellung:

$$S = Qa \;.\;.\;.\; 2.$$

Zieht man SB $=$ l und setzt $\sphericalangle$ SBM $= \varphi$, so ist auch

$$S = Ql \cos \varphi \;.\;.\;.\; 3.$$

Befindet sich der Schwerpunkt vertical über der Drehaxe, so ist $\varphi = 90^0$, und wenn dann der Körper um den Winkel δ vorwärts oder rückwärts gedreht wird, so ist $\varphi = (90 \pm \delta)$, also:

$$S = Ql \cos (90 \pm \delta) \;.\;.\;.\; 4.$$

Je nachdem dann der Körper vorwärts oder rückwärts gedreht

wird, ist seine Stabilität negativ oder positiv. Befindet sich der Schwerpunkt vertical unter der Drehaxe, so ist je nach der Drehung:

$$S = Ql \cos (270 \pm \delta) \ldots 5.$$

Hier wird S für $+ \delta$ positiv und für $- \delta$ negativ.

§. 83.

Aufgaben. 1. Man soll die Stabilität eines senkrechten Parallelepipeds bestimmen.

Aufl. Es sei b die Breite, h die Höhe, l die Länge, γ das Gewicht einer Kubikeinheit des Körpers. Nach der Formel 2 des vorigen § ist nun $Q = bhl\gamma$. Der Werth des Hebelsarms a ändert sich, je nachdem der Körper auf einer Seiten- oder Grundfläche steht und um die eine oder andere Kante gedreht werden soll. Liegt er auf einer Seitenfläche, wobei b die horizontale Kante ist, und soll er um die Kante l gedreht werden, so ist der Hebelsarm des Gewichts $a = \frac{b}{2}$, daher die Stabilität in Bezug auf die Kante l

$$S = \frac{1}{2} b^2 hl\gamma \ldots 1.$$

In Bezug auf die Kante b ist der Hebelsarm $a = \frac{l}{2}$, daher

$$S' = \frac{1}{2} bhl^2\gamma \ldots 2.$$

Hieraus ergibt sich $S : S' = b : l$. Es verhalten sich also die Stabilitäten eines Körpers in Bezug auf zwei Kanten der Grundfläche umgekehrt wie die Längen dieser Kanten.

2. Man soll die Stabilität eines senkrechten Kreiscylinders bestimmen?

Aufl. Es sei r der Radius der Grundfläche, l die Länge des Cylinders, so ist:

$$S = r^2\pi l\gamma . r = r^3\pi l\gamma.$$

3. Man soll die Stabilität eines hohlen Cylinders bestimmen?

Aufl. Es sei r der äußere, ϱ der innere Radius, l die Länge, so ist $Q = (r^2 - \varrho^2) \pi l\gamma$; $a = r$, daher

$$S = (r^2 - \varrho^2) \pi r l\gamma.$$

Nehmen wir einen vollen Cylinder von gleicher Masse und den Radius r', so ist $S = r'^2, \pi r l\gamma$. Die Stabilitäten verhalten sich also wie $r : r'$, woraus folgt, daß die des hohlen größer ist, als die des vollen.

4. Die Stabilität eines senkrechten Prisma zu bestimmen, dessen Querschnitt, Fig. 60, ein rechtwinkeliges Dreieck ist und das mit einer Seitenfläche auf einer horizontalen Ebene liegt.

Aufl. Es sei $AB = b$, $BC = h$, l die Länge, so ist in Bezug auf die Kante A die Stabilität

$$S = \frac{1}{3} b^2 hl\gamma \ldots 1$$

und in Bezug auf die Kante B

$$S' = \frac{1}{6} b^2 hl\gamma \; . \; . \; . \; 2.$$

5. Die Stabilität einer Mauer zu bestimmen, deren Querschnitt ein Paralleltrapez, Fig. 61, ist.

Aufl. Es sei AB = a, DC = b, BC = h, l die Länge der Mauer. Das Gewicht der Mauer ist $Q = (a + b) \frac{h}{2} . l\gamma$. Der Hebelsarm dieses Gewichts in Bezug auf die Kante B ist $= \frac{1}{3} . \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$, und in Bezug auf $B = \frac{1}{3} . \frac{2a^2 + ab - b^2}{a + b}$.

Daher die Stabilität in Bezug auf B

$$S = (a + b) \frac{h}{2} l\gamma . \frac{1}{3} . \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b} = \frac{1}{6} hl\gamma (a^2 + ab + b^2) \; . \; . \; . \; 1$$

und in Bezug auf A:

$$S' = (a + b) \frac{h}{2} . l\gamma . \frac{1}{3} \frac{2a^2 + ab - b^2}{a + b} = \frac{1}{6} hl\gamma (2a^2 + 2ab - b^2) \ldots 2.$$

Ist n ein echter Bruch und bezeichnet man damit die Böschung oder Ausladung für die Höhe = 1, so ist dieselbe für die ganze Höhe der Mauer nh = EA. Demnach AB = a = b + nh. Führt man diesen Werth für a in die vorige Gleichung ein, so erhält man die Stabilität der Mauer in Bezug auf A:

$$S' = hl\gamma \left(\frac{n^2 h^2}{3} + nbh + \frac{bh}{2} \right) . \; . \; . \; 3.$$

Betrachtet man eine parallelepipedische Mauer, die denselben Inhalt hat mit der vorigen, so ist ihre Breite $b + \frac{nh}{2}$, folglich ihre Stabilität:

$$S'' = \left(b + \frac{nh}{2} \right) hl\gamma . \frac{1}{2} \left(b + \frac{nh}{2} \right)$$

oder

$$S'' = hl\gamma \left(\frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2} nhb + \frac{1}{8} n^2 h^2 \right) \ldots 4.$$

Sucht man die Differenz der Stabilitäten beider Mauern, so findet man

$$S' - S'' = \left(b + \frac{5}{12} . nh \right) . \frac{nh^2 l\gamma}{2} \; . \; . \; . \; 5.$$

Um diese Größe ist demnach die Stabilität der Böschungsmauer größer, als die der parallelepipedischen von gleichem Volumen.

6. Man soll die Stabilität eines Theils einer mit Strebepfeilern versehenen parallelepipedischen Mauer bestimmen.

Aufl. Es seien Fig. 62a und 62b Grundriß und Querschnitt der Mauer. Die Grundfläche eines Strebepfeilers ist ein Rechteck ABCD, der Durchschnitt ein rechtwinkeliges Dreieck abc. Man betrachte

das Stück HELG der Mauer, E und F seien die Mitten der Entfernungen zweier Strebepfeiler, die Breite der Mauer HE $= b$, die Länge HG $= l$, die Höhe fg $= h$, AD $=$ ab $= c$, DC $= d$, bc $= f$, γ das Gewicht einer Kubikeinheit der Mauer. Demnach ist das Gewicht des Mauertheils $blh\gamma$, dessen Hebelsarm in Bezug auf DC ist $= \left(\frac{b}{2} + c\right)$, also das Moment $blh\gamma \left(\frac{b}{2} + c\right)$.

Das Gewicht des Strebepfeilers ist $\frac{cdf\gamma}{2}$ und dessen Hebelsarm $\frac{2}{3}c$, also dessen Moment $\frac{c^2df\gamma^2}{3}$. Die Stabilität des betrachteten Mauertheils mit Strebepfeilern ist sonach:

$$S = blh\gamma\left(\frac{b}{2} + c\right) + \frac{c^2df\gamma}{3} \quad \ldots 1$$

wird $f = h$, so erhält man:

$$S = \frac{1}{6}(3b^2l + 6blc + 2c^2d)\,h\gamma \ldots 2.$$

Hat der Strebepfeiler eine parallelepipedische Form und die Grundfläche ABCD, so findet man die Stabilität des betrachteten Mauertheils:

$$S' = blh\gamma\left(\frac{b}{2} + c\right) + \frac{cdf\gamma}{2} \quad \ldots 3.$$

7. Man soll den Querschnitt einer Mauer, Fig. 61, bestimmen, welche mit einer parallelepipedischen von gleicher Länge und Höhe und aus demselben Material bestehe, gleiche Stabilität besitze, ihr Kubikinhalt aber nur $\frac{m}{n}$ dieser sei.

Aufl. Es sei die obere Breite DC $= x$, die untere AB $= y$, b die Dicke der parallelepipedischen, h die Höhe, l die Länge beider Mauern. Nach Aufgabe 5 Gl. 2 ist die Stabilität der in Frage stehenden Mauer:

$$S = \frac{1}{6}hl\gamma\,(2y^2 + 2yx - x^2).$$

Die der parallelepipedischen Mauer ergibt sich $S = \frac{1}{2}b^2hl\gamma$. Durch Gleichsetzung beider Werthe erhält man die Bedingungsgleichung:

$$2y^2 + 2xy - x^2 = 3b^2 \quad \ldots 1.$$

Durch Gleichsetzung der Kubikinhalte beider Mauern findet man ferner die Gleichung:

$$\frac{1}{2}(x + y)\,hl = \frac{m}{n}\,bhl$$

oder

$$n\,(x + y) = 2mb \quad \ldots 2.$$

Aus beiden Gleichungen ergibt sich nun:

$$x = \frac{b}{n}\left(-2m + \sqrt{(12m^2 - 3n^2)}\right)$$

$$y = \frac{b}{n}\left(4m - \sqrt{(12m^2 - 3n^2)}\right).$$

Hiernach ist die Auflösung der Aufgabe nur dann möglich, wenn $\sqrt{(12m^2 - 3n^2)} \geqq 2m$, oder $\frac{m}{n} \geqq 0{,}61$ ist. Die Materialersparniß würde dann höchstens etwa $\frac{1}{3}$ vom Material der parallelepipedischen Mauer betragen, wofür dann $\frac{m}{n} = \frac{2}{3} = 0{,}66$ wäre.

Viertes Kapitel.

Von der Reibung.

§. 84.

Erklärung. Die Oberflächen der Körper sind nie vollkommen glatt, selbst die bestpolirten nicht. Sie besitzen immer Erhöhungen und Vertiefungen, welche ineinander eingreifen, sobald die Körper sich berühren und einen Druck auf einander ausüben. Soll nun ein Körper auf einem andern hinbewegt werden, so müssen die in die Vertiefungen eingreifenden Erhöhungen der Berührungsflächen abgebrochen, umgebogen oder übereinander weggehoben werden. Hierdurch wird aber in der Richtung der Berührungsflächen ein Widerstand erzeugt, welcher Reibungswiderstand oder kurzweg Reibung (Friction) genannt wird. Die Reibung ist demnach als eine die Bewegung hemmende Kraft zu betrachten. Außer der Reibung ist bei der Bewegung noch die Adhäsion der Berührungsflächen zu überwinden, welche aber, namentlich bei bedeutenden Pressungen, als zu unbedeutend vernachlässigt werden kann.

§. 85.

Arten der Reibung. Man unterscheidet namentlich zwei Arten von Reibung, nämlich die gleitende Reibung und die rollende oder wälzende Reibung.

Die gleitende Reibung entsteht, wenn ein Körper auf einem andern hingeschoben oder gezogen wird, wie z. B. der Schlitten auf einer Straße.

Die rollende oder wälzende Reibung wird erzeugt, wenn ein runder Körper auf einem andern hingewälzt oder fortgerollt wird, wie z. B. die Wagenräder auf der Straße.

Zur gleitenden Reibung gehört auch die drehende oder Zapfenreibung. Sie entsteht, wenn eine Axe oder der Zapfen einer

Welle sich im Lager bewegt. Liegt die Welle horizontal, so findet die Reibung am Umfange des Zapfens statt. Steht die Welle vertical, so entsteht auch Reibung an der Grundfläche des Zapfens.

Wenn die Körper einige Zeit mit einander in Berührung gestanden haben, so ist die Kraft, welche nöthig ist, die Bewegung zu bewirken, größer, als diejenige, welche erforderlich, sie zu erhalten. Daher unterscheidet man auch noch die Reibung der Ruhe und die Reibung der Bewegung.

Gleitende Reibung.

§. 86.

Erfahrungsgesetze. Die allgemeinen Gesetze, welche man durch viele und sorgfältig angestellte Versuche gefunden hat, sind folgende:

1. Die Reibung ist unter sonst gleichen Umständen dem Normaldrucke proportional.

2. Die Reibung ist von der Größe der Berührungsflächen unabhängig.

Dieß gilt streng genommen jedoch nur bei bedeutendem Drucke, wobei die Adhäsion unberücksichtigt bleiben kann. Bei geringem Drucke hat die Größe der Berührungsflächen, wegen der stattfindenden Adhäsion immerhin einen Einfluß auf die Vergrößerung des Widerstandes. Auch wird hier vorausgesetzt, daß keine Geleisen oder Furchen entstehen, also keine der Berührungsflächen eine lineare Dimension habe.

3. Die Reibung ist unabhängig von der Geschwindigkeit der Bewegung.

4. Die Reibung der Ruhe ist größer als die der Bewegung.

5. Durch das Einschmieren der sich reibenden Flächen mit passenden Schmiermitteln wird nicht nur die Reibung bedeutend vermindert, sondern auch aller Unterschied, welcher bei trockener Reibung zwischen Körpern von verschiedener Materie besteht, aufgehoben.

§. 87.

Berechnung. Zur Berechnung der gleitenden Reibung nehmen wir an, es sei Q der Normaldruck eines Körpers auf eine Fläche, F die Reibung oder die zur Ueberwindung des Reibungswiderstandes tangential zu den Berührungsflächen nöthige Kraft, q der Normaldruck zwischen zwei andern Körpern von derselben Materie und unter denselben Umständen, f die Reibung, so haben wir nach dem ersten Satze des vorigen § die Proportion:

$$F:f = Q:q$$

und daraus:

$$F = \frac{f}{q}.Q.$$

Der Quotient $\frac{f}{q}$ drückt das Verhältniß der Reibung zum Normaldruck oder die Reibung für den Druck gleich der Gewichtseinheit

aus, und ist für die verschiedenen Materialien durch Versuche bestimmt. Setzt man diese Zahl $\frac{f}{q} = \mu$, so heißt man dieselbe den Reibungscoefficient. Man erhält also

$$F = \mu Q$$

d. h. man findet die Reibung, wenn man den Normaldruck mit dem Reibungscoefficienten multiplicirt.

Für die am meisten vorkommenden Fälle sind die Reibungscoefficienten in folgenden Tafeln enthalten.

Tafel I.

Coefficienten für die Reibung der Ruhe.

Angabe der reibenden Flächen.	Lage der Fasern.	Zustand der Oberflächen.	Reibungscoefficient.
Eiche auf Eiche	parallel . . .	ohne Schmiere . .	0,62
	„ . . .	mit trockener Seife .	0,44
	rechtwinkelig . .	ohne Schmiere . .	0,54
	„ . .	mit Wasser befeuchtet	0,71
	Hirn auf plattliegendem . .	ohne Schmiere . .	0,43
Eiche auf Ulme	parallel . . .	„ . .	0,38
Ulme auf Eiche	„ . . .	„ . .	0,69
	„ . . .	mit trockener Seife .	0,41
	rechtwinkelig . .	ohne Schmiere . .	0,57
Esche, Tanne, Buche, Vogelbeer auf Eiche	parallel . . .	„ . .	0,53
Gegerbtes Leder auf Eiche . .	das Leder platt liegend . . .	„ . .	0,61
	das Leder auf der Kante . .	„ . .	0,43
		mit Wasser befeuchtet	0,73
Schwarze lederne Riemen . . auf ebener Eichenfläche	parallel . . .	ohne Schmiere . .	0,74
Schwarze lederne Riemen . . auf einer eichenen Trommel	rechtwinkelig . .	„ . .	0,47
Ungesponnener Hanf auf Eiche .	parallel . . .	„ . .	0,50
		mit Wasser . . .	0,87
Hanfseil auf Eiche	„ . . .	ohne Schmiere . .	0,80
Eisen auf Eiche	„ . . .	„ . .	0,62
		mit Wasser . . .	0,65
Gußeisen auf Eiche	„ . . .	„ . . .	0,65
Gelbguß auf Eiche	„ . . .	ohne Schmiere . .	0,62
Rindsleder bei Kolben auf Gußeisen	platt oder auf der Kante . .	mit Wasser . . .	0,62
		mit Oel, Seife oder Schweinefett . .	0,12
Lederne Riemen auf gußeisernen Rollen	platt liegend . .	ohne Schmiere . .	0,28
		mit Wasser . . .	0,38
Gußeisen auf Gußeisen . . .	„ . .	ohne Schmiere . .	0,16 [1]
Schmiedeisen auf Gußeisen . .	„ . .	„ . .	0,19

[1]) Die Oberfläche wenig fett.

Angabe der reibenden Flächen.	Lage der Fasern.	Zustand der Oberflächen.	Reibungscoefficient.
Eiche, Ulme, Weißbuche, Eisen, Gußeisen und Bronze, zwei und zwei, eines auf dem andern	platt liegend	mit Talg	0,10[1])
		mit Oel oder Schweinefett	0,15[2])
Rogenstein auf Rogenstein	„	ohne Schmiere	0,74
Muschelkalk auf Rogenstein	„	„	0,75
Backstein auf Rogenstein	„	„	0,67
Eichen auf Rogenstein	auf dem Hirn	„	0,63
Schmiedeisen auf Rogenstein	„	„	0,49
Muschelkalk auf Muschelkalk	„	„	0.70
Rogenstein auf Muschelkalk	„	„	0,75
Backstein auf Muschelkalk	„	„	0,67
Schmiedeisen auf Muschelkalk	„	„	0,42
Eiche auf Muschelkalk	„	„	0,64
Rogenstein auf Rogenstein	„	mit Mörtel aus drei Theilen feinem Sand und ein Theil hydraulischem Kalk	0,74[3])

Tafel II.

Coefficienten für die Reibung der Bewegung.

Angabe der reibenden Flächen.	Lage der Fasern.	Zustand der Oberflächen.	Reibungscoefficient.
Eiche auf Eiche	parallel	ohne Schmiere	0,48
	„	mit trockener Seife	0,16
	rechtwinkelig	ohne Schmiere	0,34
	„	mit Wasser	0,25
	Hirnholz auf den Fasern	ohne Schmiere	0,19
Ulme auf Eiche	parallel	„	0,43
	rechtwinkelig	„	0,45
	parallel	„	0,25
Esche, Tanne, Buche, wilder Birnbaum und Vogelbeer auf Eiche	„	„	0,36—0,40
Schmiedeisen auf Eiche	„	„	0,62
		mit Wasser	0,26
		mit trockener Seife	0,21
Gußeisen auf Eiche	„	ohne Schmiere	0,49
		mit Wasser	0,22
		mit trockener Seife	0,19
Gelbguß auf Eiche	„	ohne Schmiere	0,62
Schmiedeisen auf Ulme	„	„	0,25
Gußeisen auf Ulme	„	„	0,20
Lederne Riemen auf Eiche	„	„	0,27

[1]) Die Berührung dauerte nicht lange genug, um die Schmiere hinauszudrücken. — [2]) Die Berührung dauerte lange genug, die Schmiere wegzudrücken und einen nur wenig fettigen Zustand herbeizuführen. — [3]) Nach einer Berührung von 10′ bis 15′.

Angabe der reibenden Flächen.	Lage der Fasern.	Zustand der Oberflächen.	Reibungs-coefficient.
Gegerbtes Leder auf Eiche . .	platt oder auf der Kante .	ohne Schmiere . .	0,30—0,35
		mit Wasser . . .	0,29
Gegerbtes Leder auf Gußeisen oder Bronze	platt oder auf der Kante .	ohne Schmiere . .	0,56
		mit Wasser . . .	0,36
		fett und mit Wasser	0,23
		mit Oel geschmiert .	0,15
Ungesponnener Hanf oder Hanfseile	parallel . .	ohne Schmiere . .	0,52
	rechtwinklig .	naß	0,33
Eiche und Ulme auf Gußeisen	parallel . .	ohne Schmiere . .	0,38
Wilder Birnbaum auf Gußeisen	"	"	0,44
Schmiedeisen auf Schmiedeisen .	"	"	0,44
Schmiedeisen auf Gußeisen und Bronze	"	"	0,18
Gußeisen auf Gußeisen und Bronze	"	"	0,15
Bronze auf Bronze . . .	"	"	0,20
Bronze " Gußeisen . . .	"	"	0,22
Bronze " Schmiedeisen . .	"	"	0,16
Eiche, Ulme, Weißbuche, wilder Birnbaum, Gußeisen, Schmiedeisen, Stahl und Bronze eines auf dem andern oder sich selbst	"	auf gewöhnliche Art geschmiert mit Talg, Schweinefett, Oel, Wagenschmiere ꝛc. ꝛc.	0,07—0,08
		nur wenig fettes Anfühlen . . .	0,15
Rogenstein auf Rogenstein . .	"	ohne Schmiere . .	0,64
Muschelkalk " " . .	"	"	0,67
Backstein " " . .	"	"	0,65
Eiche " " . .	auf dem Hirn	"	0,38
Schmiedeisen " " . .	parallel . .	"	0,38
Muschelkalk auf Muschelkalk . .	"	"	0,69
Rogenstein " " . .	"	"	0,65
Backstein " " . .	"	"	0,60
Eiche " " . .	auf dem Hirn	"	0,38
Schmiedeisen " " . .	parallel . .	"	0,24
	"	naß	0,30

Aufg. 1. Wie groß ist die Reibung der Bewegung bei einem gußeisernen Sägegatten, dessen Gewicht 50 Kilgr. beträgt, welches in horizontaler Führung von Metall läuft und wenn Schweinefett als Schmiere gebraucht wird.

Aufl. Es ist für diesen Fall nach Tafel II. $\mu = 0{,}07$, $Q = 50$, daher: $F = 0{,}07 . 50 = 3{,}5$ Kilgr.

Aufg. 2. Ein Körper, Fig. 13, von Eichenholz und dem Gewichte = 300 Pfd. liegt auf einer eichenen horizontalen Unterlage. Am Schwerpunkt desselben wirkt eine Kraft von 150 Pfd. unter einem Winkel von 36°. Die Fasern der Berührungsflächen sind parallel und ohne Schmiere. Man soll untersuchen, ob die an ihm wirkende Kraft im Stande ist, ihn zu bewegen?

Aufl. Nach §. 24 Beisp. 2 ist der Normaldruck = 211,832 Pfd., der horizontale Zug = 121,35 Pfd. Nun ist nach Tafel I. $\mu = 0{,}62$, daher die Reibung $F = 0{,}62 . 211{,}832$ Pfd. $= 131{,}33$

Pfd. Da nun die Reibung größer ist als der horizontale Zug, so kann der Körper durch die angebrachte Kraft nicht bewegt werden.

Sind die Berührungsflächen mit trockener Seife eingeschmiert, so ist $\mu = 0{,}44$, daher die Reibung $F = 0{,}44 . 211{,}832 = 93{,}21$ Pfd. In diesem Falle ist die Reibung geringer als die horizontale Zugkraft und der Körper wird sich folglich bewegen.

§. 88.

Drehende oder Zapfenreibung. Bewegt sich der Zapfen A einer horizontalliegenden Welle, Fig. 63, in seinem Lager MN nach der Richtung des Pfeils, so wird er auf der Lagerfläche so weit in die Höhe steigen, bis die Tangentialkraft im Berührungspunkte D mit der Reibung in's Gleichgewicht gekommen ist. Es sei nun C der Mittelpunkt des Zapfens, CH die von demselben durch den Berührungspunkt gezogene Normale, DR die Richtung der Mittelkraft R sämmtlicher auf den Zapfen wirkenden Kräfte. FDE die Tangente an D, α der Winkel HDR, den die Richtung von R mit der Normale bildet, μ der Reibungscoefficient für gleitende Reibung und F der Reibungswiderstand.

Zerlegt man nun die Mittelkraft R in zwei rechtwinkelige Seitenkräfte nach der Normale und Tangente, so ist der Normaldruck $= R . \cos \alpha$, die Tangentialkraft $= R \sin \alpha$. Die aus dem Normaldruck entspringende und nach DF der Tangentialkraft entgegenwirkende Reibung ist demnach:

$$F = \mu R \cos \alpha.$$

Für den Zustand des Gleichgewichts ist aber

$$\mu R \cos \alpha = R \sin \alpha.$$

Hieraus ergibt sich $\cos \alpha \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}$. Setzt man diesen Werth in die erste Gleichung, so erhält man:

$$F = \frac{\mu R}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

Setzt man $\frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} = \mu'$, so folgt

$$F = \mu' R \; . \; . \; . \; 1.$$

Diese Kraft wirkt nun am Umfang des Zapfens. Ihr Hebelsarm ist der Zapfenradius $= \varrho$, daher das statische Moment der Zapfenreibung:

$$F\varrho = \mu' R . \varrho \; . \; . \; . \; 2.$$

Wenn der Zapfen fest ist und das Lager oder ein hohler Cylinder sich um denselben bewegt, so hat man für ϱ den Halbmesser der innern Lager- oder Cylinderfläche zu nehmen.

Der Coefficient μ' ist ebenfalls durch viele sorgfältig angestellte Versuche für die verschiedenen Materien ermittelt und in folgender Tafel enthalten.

Tafel III.

Reibungscoefficienten für Zapfen, die sich in ihren Lagern bewegen.

Angabe der Oberflächen.	Zustand der Oberflächen.	Reibungscoefficient, wenn die Schmiere erneuert wird. Auf gewöhnliche Art.	Ununterbrochen.
Zapfen von Gußeisen auf Lagern von Gußeisen	geschmiert mit Olivenöl, Schweinefett, Talg oder Schweinefett mit Graphit	0,07—0,08	0,054
	mit denselben Schmieren, naß . .	0,08	"
	mit Asphalt	0,054	"
	fettig	0,14	"
	fettig und naß	0,14	"
Zapfen von Gußeisen auf Lagern von Bronze	geschmiert mit Olivenöl, Schweinefett, Talg oder Schweinefett mit Graphit	0,07—0,08	"
	fettig	0,16	"
	fettig und naß	0,16	"
	sehr wenig fettig	0,19	"
Zapfen von Gußeisen auf Lagern von Franzosenholz	ohne Schmiere	0,18	"
	geschmiert mit Oel oder Schweinefett	"	0,090
	fettig von Oel oder Schweinefett .	0,10	"
	fettig von Schweinefett und Graphit	0,14	"
Zapfen von Schmiedeisen auf Lagern von Bronze.	geschmiert mit Olivenöl, Talg, Schweinefett oder Schweinefett und Graphit	0,07—0,08	0,054
Zapfen von Schmiedeisen auf Lagern von Bronze	geschmiert mit Olivenöl, Schweinefett oder Talg	0,07—0,08	0,054
	geschmiert mit fester Wagenschmiere	0,09	"
	fett und naß	0,19	"
	sehr wenig fett	0,25	"
Schmiedeiserne Zapfen auf Lagern von Franzosenholz	geschmiert mit Oel oder Schweinefett	0,11	"
	fett	0,19	"
Zapfen von Bronze auf Lagern von Bronze	geschmiert mit Oel	0,10	"
	geschmiert mit Schweinefett . . .	0,09	"
Zapfen von Bronze auf Lagern von Gußeisen	geschmiert mit Oel oder Talg . .	"	0,045 bis 0,052
Zapfen von Franzosenholz auf Lagern von Gußeisen	geschmiert mit Schweinefett . . .	0,12	"
	fett	0,15	"
Zapfen von Franzosenholz auf Lagern von Franzosenholz.	geschmiert mit Schweinefett . . .	"	0,07

Aufg. Wie groß ist die Reibung der Zapfen bei einem Wasserrad, dessen Zapfen auf die Lager einen Druck von 12000 Kilgr. ausüben. Die Zapfen sind aus Gußeisen, die Lager von Bronze, die Reibungsflächen fettig und naß?

Aufl. Für diesen Fall ist der Reibungscoefficient $\mu' = 0{,}16$. $R = 12000$, daher $F = 0{,}16 . 12000 = 1920$ Kilgr.

§. 89.

Reibung an der Grundfläche eines Zapfens. Es sei Fig. 64 ACG die kreisförmige Grundfläche des Zapfens, dessen Radius $AC = \varrho$, Q der in der Richtung der Axe wirkende und auf der Grundfläche gleichmäßig verbreitete Druck, μ der Reibungscoefficient. Man theile nun den Radius AC des Zapfens in n gleiche Theile, wovon jeder $= \delta$, ziehe aus dem Mittelpunkt C durch diese Theilungspunkte Kreise, wodurch die Grundfläche in lauter concentrische Elemente zerlegt wird. Es seien CD und CB zwei solcher Kreise und der Radius $CD = x$, $CB = x + \delta$, so wird der Inhalt des entstandenen Ringes sein $= 2\pi x\delta$, da δ sehr klein vorausgesetzt wird. Da nun Q der Druck auf die Fläche $\varrho^2\pi$ ist, so erhält man den Druck auf das Element $= \frac{2\delta x Q}{\varrho^2}$, also die Reibung $= \frac{2\delta x \mu Q}{\varrho^2}$ und folglich das Moment der Reibung in Bezug auf den Mittelpunkt $= \frac{2\mu Q}{\varrho^2} . x^2\delta$. Derselbe Ausdruck wird sich nun für alle Flächenelemente ergeben. Setzt man daher in denselben der Reihe nach 1δ, 2δ, 3δ . . . $n\delta$ für x und addirt die Resultate, so erhält man die Summe der Momente der Reibung auf den einzelnen Elementen:

$$= \frac{2\mu Q\delta^3}{\varrho^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots n^2) = \frac{2\mu Q\delta^3}{\varrho^2} . \frac{n^3}{3} = \frac{2\mu Q}{\varrho^2} \frac{(n\delta)^3}{3}$$

$$= \frac{2\mu Q}{\varrho^2} . \frac{\varrho^3}{3} = \frac{2}{3}\mu Q\varrho.$$

Ist nun z der Abstand des Angriffspunktes der gesammten Reibung von der Drehaxe, so ist das Moment derselben μQz. Dieß muß gleich sein der obigen Summe, daher ist

$$\mu Qz = \frac{2}{3}\mu Q\varrho.$$

$$z = \frac{2}{3}\varrho \ldots 1$$

d. h. die Reibung an der Grundfläche des Zapfens kann man sich in einer Entfernung von ⅔ des Zapfenradius von dem Mittelpunkt des Zapfens aus vereinigt vorstellen.

Ist die Zapfenfläche die Differenz zweier concentrischen Kreise, deren Radien ϱ und ϱ' sind, so erhält man ähnlich wie vorher die Gleichung

$$\mu Q (\varrho^2 - \varrho'^2)\, z = \frac{2}{3}\, \mu Q\, (\varrho^3 - \varrho'^3)$$

$$\mu Q z = \frac{2}{3}\, \frac{\mu Q\, (\varrho^3 - \varrho'^3)}{(\varrho^2 - \varrho'^2)}$$

$$z = \frac{2}{3} \cdot \frac{\varrho^3 - \varrho'^3}{\varrho^2 - \varrho'^2} \ldots 2.$$

Bei einem conisch zugespitzten Zapfen, Fig. 66, sei der halbe Convergenzwinkel DCB $= \alpha$, der Radius des Zapfens an der Eintrittsstelle AD $= \varrho$. Zerlegt man nun die verticalwirkende Kraft in zwei auf die Lagerflächen normale Seitenkräfte, so ist jede derselben $N = \frac{Q}{2 \sin \alpha}$, daher beide zusammen $2N = \frac{Q}{\sin \alpha}$. Demnach ist die Reibung des Zapfens $= \frac{\mu Q}{\sin \alpha}$, folglich das Moment $= \frac{2}{3} \varrho \cdot \frac{\mu Q}{\sin \alpha}$.

Man sieht, daß bei einem solchen Spitzzapfen die Reibung größer ist, als bei einem Zapfen mit ebener Grundfläche und gleichem Radius. Das Reibungsmoment wird aber bei demselben um so kleiner, je weniger tief man ihn in die Pfanne greifen läßt, und so kann man durch Anwendung eines solchen Spitzzapfens den Reibungswiderstand vermindern.

Oft werden auch abgerundete Zapfen angewendet, durch welche das Reibungsmoment gleichfalls vermindert werden kann, Fig. 67 und 68.

§. 90.

Zur Verminderung der Axenreibung drehender Körper stützt man dieselbe oft durch spitze Stifte, scharfe Kanten u. s. f. Es ist dabei die Unterstützungsfläche ein Punkt oder eine Linie. Wären nun die Körper absolut hart und unelastisch, so würde die Reibung als Null zu betrachten sein; allein dieß ist nicht der Fall. In Folge der Elasticität und unvollkommenen Härte drücken sich die aufliegenden Körper in die Spitzen oder Kanten etwas ein, wodurch bei erfolgender Drehung Reibung erzeugt wird. Auch werden die Stützen allmählig abgenutzt und die sich reibenden Flächen dadurch größer, in welchem Falle die Reibung den oben aufgestellten Gesetzen unterliegt.

Ueber die Reibung eines Körpers auf einer harten Stahlspitze hat Coulomb Versuche angestellt. Hiernach wächst die Reibung etwas stärker als der Druck und ist veränderlich mit der Zuspitzung des Stiftes. Die Reibung des Granats (als Hütchen) ist am geringsten; dann folgen der Ordnung nach Achat, Bergkrystall, Glas und Stahl.

Die mehr oder minder spitze Form des Stiftes wirkt auf die Reibung der Art ein, daß für größere Belastung der Winkel an der Kegelspitze 30 bis 45° genommen werden muß. Bei sehr geringer Belastung, z. B. bei einer Magnetnadel, kann der Winkel auf 10 bis 12° reducirt werden.

Bei sphärischen oder conischen Aufhängehütchen ist die Reibung

größer, als wenn eine ebene, gut polirte Fläche derselben Substanz sich auf der Stütze dreht. Den schneidigen Axen bei Wagen für schwerere Lasten gibt man eine Convergenz von 90°, für leichtere von 30°.

Rollende oder wälzende Reibung.

§. 91.

Die bis jetzt über diesen Gegenstand angestellten theoretischen und praktischen Untersuchungen können noch keineswegs als zuverlässig für alle Fälle angesehen werden. Man weiß, daß bei gleichem Druck und gleichartigen Reibungsflächen der Widerstand bedeutend geringer ist, als bei der gleitenden Reibung. Um das Gesetz dieses Widerstandes zu finden, hat Coulomb Versuche angestellt mit Walzen aus Guajacholz von 2 bis 6 und 12 Zoll Durchmesser, die er verschieden belastete. Er leitete aus diesen Versuchen das Gesetz ab:

Der Widerstand beim Rollen von cylinderförmigen Walzen und Rädern auf horizontaler Unterlage ist unter sonst gleichen Umständen der Pressung direct und dem Halbmesser umgekehrt proportional.

Dasselbe Gesetz bestätigte auch Morin durch seine in ausgedehnterem Maße angestellten Versuche.

Bezeichnet demnach r den Halbmesser der Walze, Q die gesammte Pressung auf die Unterlage, μ den Reibungscoefficienten, F den Reibungswiderstand, so hat man:

$$F = \frac{\mu Q}{r}$$

und

$$\mu = \frac{r F}{Q}.$$

Bei eichenen Unterlagen ergab sich der Coefficient, wenn r in pariser Zoll ausgedrückt wird:

Für Walzen aus Guajacholz $\mu = 0{,}018 = \frac{1}{56}$

" " " Ulmenholz $\mu = 0{,}03 = \frac{1}{33}$.

Ist r in badischen Fußen ausgedrückt, so wird beziehungsweise $\mu = 0{,}001615 = \frac{1}{616}$ und $\mu = 0{,}002707 = \frac{1}{369}$. F und Q müssen immer auf dieselbe Gewichtseinheit bezogen werden.

Beispiel. Wenn ein Rad von Ulmenholz auf eichener Unterlage fortgerollt wird und einen Durchmesser von 4 Fuß hat, so ist $F = \frac{Q}{369.2} = \frac{Q}{738}$. Beträgt die Last Q = 738 Pfd., so ist F = 1 Pfd. Dieses Gewicht von 738 Pfd. kann also durch 1 Pfd. Kraft bewegt werden. Bei der gleitenden Reibung ist für den allergünstigsten Fall nach Taf. II. der Coefficient = 0,07 und zur Bewegung obiger Last wäre eine Kraft = 0,07 . 738 = 51,66 Pfd. nothwendig.

Wegen dieses geringen Widerstandes wird der Transport sehr bedeutender Lasten oft mittelst Walzen oder Kugeln bewerkstelligt.

Die Bestimmung der rollenden Reibung ist für den Transport mit Räderfuhrwerken von großer Wichtigkeit und gehört das Nähere hierüber in die Lehre vom Transportwesen.

§. 92.

Frictionsrollen. Zur Verminderung der gleitenden Reibung führt man dieselbe zum Theil oft in eine rollende über durch Anwendung der Frictionsrollen. Ein Körper AB, Fig. 69, soll z. B. über einen andern CD hinbewegt werden. Statt ihn unmittelbar auf CD gleiten zu lassen, bringt man an letzterm die nur um ihre Axen drehbaren Rollen F an, auf welche er gelegt wird. Es sei nun Q die Last oder der Druck auf die Zapfen der Rollen, r und R die Radien der Zapfen und der Rollen, μ der Reibungscoefficient, F die nach der Tangente an den Rollen zur Ueberwindung der Reibung nöthige Kraft. Die Reibung an den Zapfen ist $= \mu Q$, ihr statisches Moment $r\mu Q$, daher

$$FR = r\mu Q \text{ und } F = \frac{r}{R} \cdot \mu Q.$$

Wären die Rollen nicht vorhanden, so würde eine Kraft $= \mu Q$ nöthig sein, um den Körper AB zu bewegen. Es wird demnach durch Anwendung dieser Frictionsrollen die Reibung im Verhältnisse der Durchmesser der Zapfen zu denen der Rollen vermindert.

Wenn eine horizontalliegende Welle A, Fig. 70, mit ihrem Zapfen C auf den Rädern oder Rollen BB′ ruht, so läßt sich der in der Richtung CD verticalwirkende Druck Q in zwei durch die Axen der Rollen gehende Seitenkräfte N, N′ zerlegen, haben R, r; R′, r′ die obige Bedeutung für die Rollen BB′, so ist $\frac{r}{R}\,\mu N$ die Reibung an der Rolle B und $\frac{r'}{R'}\,\mu N'$ an B′. Somit ist die Gesammtreibung:

$$F = \mu\left(\frac{r}{R}\,N + \frac{r'}{R'}\,N'\right).$$

Gewöhnlich ist $r = r'$, $R = R'$, also auch $N = N'$, daher wird

$$F = \frac{2\,\mu r N}{R}.$$

In diesem Falle ist $\sphericalangle\, GCD = \sphericalangle\, HCD = \alpha$, also $N = \frac{Q}{2\cos\alpha}$, demnach

$$F = \frac{r}{R} \cdot \frac{\mu Q}{\cos\alpha}.$$

Ist blos eine Frictionsrolle angewendet, worauf der Zapfen C liegt, Fig. 71, so geht der Verticaldruck durch die Axe D derselben und es ist $\alpha = 0$, daher $F = \frac{r}{R} \cdot \mu Q$, wobei die Reibung an den festen Backen BB′ nicht berücksichtigt ist.

Reibung eines Seiles auf einem Cylinder.

§. 93.

Ueber einen horizontalliegenden nicht drehbaren Cylinder C, Fig. 72, vom Radius r sei ein Seil gelegt, welches den Bogen ADF = s umfasse. An dem einen Ende trage es die Last Q, am andern wirke die Kraft P. Durch beide Kräfte wird nun das Seil gegen den Cylinder gepreßt. Die dadurch erzeugte Reibung muß bei Hebung der Last von der Kraft P auch überwunden werden. Zur Bestimmung von P theile man den Bogen ADB in sehr viele gleiche Theile AB, BD, DE . . . und ziehe die Tangenten an diese Punkte, welche sich in a, b, c . . . schneiden werden. Die Seilspannung nach der Tangente in A ist Q, nach der Tangente in B sei sie t′, in D t″ u. s. w. Die beiden Spannungen Q und t′ werden nun eine Normalpressung des Seiles gegen den Elementarbogen bewirken. Ist Aa = Q, Ba = t′, und construirt man das Parallelogramm AaBd, so wird die Diagonale ad die Normalpressung darstellen. Es ist aber $\triangle$ Aad $\sim$ $\triangle$ ABC anzunehmen, woraus dann folgt Aa : ad = AC : AB. Der Bogen AB = s ist aber so klein, daß man ihn mit seiner Sehne verwechseln kann, daher hat man auch, wenn man die Pressung ad = p setzt:

$$Q : p = r : s, \text{ oder}$$

$$p = \frac{Q \cdot s}{r}.$$

Ist μ der Reibungscoefficient, so ist die Reibung auf gedachtem Bogenelement $= \frac{\mu Q s}{r}$. Um diese Reibung ist nun die Spannung t′ größer als Q, daher ist:

$$t' = Q + \frac{\mu Q s}{r} = Q\left(1 + \frac{\mu s}{r}\right).$$

Ganz auf ähnliche Art findet man in der folgenden Tangente bc die Spannung $t'' = t'\left(1 + \frac{\mu s}{r}\right) = Q\left(1 + \frac{\mu s}{r}\right)^2$.

Ist der Bogen ADF in n gleiche Theile getheilt, so erhält man die Spannung in der letzten Tangente

$$t^n = P = Q\left(1 + \frac{\mu s}{r}\right)^n.$$

Entwickelt man nach dem binomischen Satze, erwägt dabei, daß S = ns ist, so folgt

$$P = Qe^{\frac{\mu S}{r}},$$

in welcher Formel e = 2,71828 die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet.

Soll die Kraft P blos das Herabgleiten der Last verhindern, so wirkt die Reibung zum Vortheil von P und man hat

$$P = Q \cdot e^{-\frac{\mu S}{r}}.$$

Beide Fälle lassen sich vereinigen in diese Formel

$$P = Q \cdot e^{\pm \frac{\mu S}{r}} \quad \ldots 1.$$

Bezeichnet φ den Bogen für den Radius = 1, so ist $S = r\varphi$, daher wird:

$$P = Q \cdot e^{\pm \mu\varphi} \quad \ldots 2.$$

Wird das Seil n mal um den Cylinder gewickelt, so ist $\varphi = 2n\pi$, daher:

$$P = Q \cdot e^{\pm 2\mu n\pi} \quad \ldots 3.$$

Setzt man in Gleichung 3 $\mu = \frac{1}{3}$ und n der Reihe nach 0, 1, 2, 3, 4, 6, so erhält man für das Aufwärtsbewegen der Last beziehungsweise: $P = Q$; $8Q$; $66Q$; $530Q$; $4348Q$; $286788{,}9\,Q$ und für das bloße Erhalten der Last: $P = Q$; $\frac{Q}{8}$; $\frac{Q}{66}$; $\frac{Q}{530}$; $\frac{Q}{4348}$; $\frac{Q}{286788{,}9}$.

Wickelt z. B. ein Mann beim Herablassen eines vollen Fasses in den Keller das Seil 3mal um den quer vor die Kellerthüre gelegten Cylinder, so kann er mit einer Kraft von 30 Pfund eine Last von 530 . 30 = 15900 Pfund = 159 Centner ohne Gefahr hinablassen.

Fünftes Kapitel.

Von den auf Seile wirkenden Kräften.

§. 94.

Erklärung. Soll ein Körper gebogen werden, so ist immer eine gewisse Kraft dazu erforderlich und es gibt keine Körper, die vollkommen biegsam sind und zu ihrer Biegung keine Kraft erforderten. Es gibt jedoch solche, die ihrer Biegung oder Formänderung äußerst geringen Widerstand darbieten, wie z. B. Schnüre, Seile, Bänder. Diese betrachten wir zunächst als vollkommen biegsam und nehmen sie an als nicht ausdehnsam und nicht schwer.

Ein Seil oder eine Verbindung von Seilen, woran Kräfte wirken, nennt man eine Seilmaschine. Derjenige Punkt, in welchem eine Kraft angreift und in dem das Seil eine Richtungsveränderung erleidet, heißt Knoten. Der Knoten ist entweder fest, wenn er seine Lage nicht ändern kann, oder beweglich, wenn er auf dem Seile verschiebbar ist.

Wirken an den Enden eines Seiles, so wie an verschiedenen andern Punkten desselben Kräfte, so bildet es im Zustande des Gleich=

gewichts eine gebrochene Linie. In diesem Falle heißt man es ein Seilpolygon.

Wenn an den beiden Enden eines Seiles zwei gleiche Kräfte P entgegengesetzt wirken, so halten sie sich im Gleichgewicht. Man heißt die Kraft P die Spannung des Seils. Wirken aber zwei ungleiche Kräfte P und Q an demselben, so daß P > Q, so ist die kleinere dieser Kräfte, also Q die Spannung. Der Ueberschuß oder die Differenz beider Kräfte wird auf Erzeugung von Bewegung verwendet und ist ohne Einfluß auf die Spannung.

§. 95.

Die Seilverbindung, Fig. 73, sei mit dem einen Ende in K befestigt, in A sei ein fester Knoten, woran das Seilstück AG befestigt sei und ein Gewicht Q trage; an dem Seiltheile nach AC wirke die Kraft P. Die Spannung nach AD sei S. Für den Zustand des Gleichgewichts müssen nun die Seiltheile oder die Richtungen der Kräfte P, Q, S, welche die Spannungen derselben ausdrücken, in einer Ebene liegen; ferner muß jede dieser Kräfte die entgegengesetzte Mittlere der beiden andern sein. Ist demnach AC = P, AG = Q, so muß die Diagonale AF des Parallelogramms ACFG der Spannung S gleich sein. Daher ist

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2\,PQ \cos \alpha},$$

wenn der Winkel, welchen die Richtung von AC mit der Verticalen bildet, α gesetzt wird. Ist ferner $\sphericalangle$ EAD $= \beta$, so hat man zur Bestimmung dieses Winkels

$$\sin \beta = \frac{Q \sin \alpha}{S}$$

wodurch die Richtung von AD gegen AC bekannt ist.

§. 96.

Ist ein Seil ACB, Fig. 74, in den Punkten A und B befestigt und trägt es mittelst eines beweglichen Knotens oder Ringes C ein Gewicht Q, so wird dieser, sofern er längs des Seiles hinbewegt wird und dabei dasselbe stets straff gespannt bleibt, eine Ellipse DCE beschreiben, deren Brennpunkte A und B und deren Fahrstrahlen AC und BC sind. Man kann also annehmen, das Gewicht bewege sich auf der concaven Seite der Ellipse. Für den Zustand des Gleichgewichts müssen nun die Seiltheile in der durch A und B gelegten Verticalebene liegen. Das Gewicht Q oder der Ring C muß die möglichst tiefe Lage einnehmen und die Verticallinie durch C muß durch den Schwerpunkt des Körpers gehen. Diese Bedingungen können jedoch nur für den Punkt C stattfinden, für welchen die Tangente horizontal, also die Normale CG vertical ist. Es halbirt aber die Normale der Ellipse stets den Winkel der beiden Fahrstrahlen, daher ist $\sphericalangle$ ACG $= \sphericalangle$ BCG. Da nun diese beiden Winkel gleich sind, so müssen auch die Spannungen nach CB und CA einander gleich

sein, weil die Richtung der Kraft Q oder die Mittlere nur in diesem Falle den Winkel ACB halbiren kann.

Sei $\sphericalangle$ ACG $= \alpha$, so ist die Spannung jedes Seiltheils

$$S = \frac{Q}{2 \cos \alpha}.$$

Wenn die Länge des Seiles AC + BC = l und die beiden Aufhängepunkte gegeben sind, so findet man den Punkt C, in welchem das Gewicht für den Zustand des Gleichgewichts aufgehängt werden muß durch folgende Construction. Man ziehe durch B die Verticale FH, schneide diese mit dem Radius AH = l von A aus in H, halbire BH in N, errichte in diesem Punkt auf BH ein Perpendikel und ziehe AH, so ist der Durchschnittspunkt C beider Linien der gesuchte Punkt.

Setzt man die horizontale Entfernung beider Punkte oder AF + a, die verticale oder FB = b, so erhält man leicht den Punkt C durch Rechnung und zwar:

$$HC = BC = \frac{l(\sqrt{l^2 - a^2} - b)}{2\sqrt{l^2 - a^2}}$$

$$AC = \frac{l(\sqrt{l^2 - a^2} + b)}{2\sqrt{l^2 - a^2}}$$

Ferner ist $\sphericalangle$ BCG $= \sphericalangle$ CBN $= \alpha$; $\cos \alpha = \frac{BN}{BC} = \frac{\sqrt{l^2 - a^2}}{l}$. Daher die Spannung nach CB und CA

$$S = \frac{Ql}{2\sqrt{l^2 - a^2}}.$$

Hieraus folgt, daß S um so größer wird, je mehr a sich l nähert und für a = l wird $S = \infty$, woraus ersichtlich, daß es unmöglich ist, ein Seil horizontal zu spannen, sobald nur das geringste Gewicht daran hängt.

§. 97.

Seilpolygon. Die Seilverbindung, Fig. 75, bestehe aus den Seilstücken DA, DB, DC, die in dem Knoten D fest mit einander verbunden seien. An den Enden A, B, C derselben wirken in einer Ebene die nach den Richtungen der Pfeile angebrachten Kräfte, welche sich im Gleichgewicht halten. Setzt man die am Punkt A wirkenden Kräfte P′ und P″ in eine Mittelkraft zusammen, so muß ihre Richtung nothwendig in die Richtung des Seiles DA fallen und ihre Intensität muß gleich der Spannung S′ desselben sein, wenn Gleichgewicht bestehen soll. Den Angriffspunkt A dieser Mittlern kann man aber nach D versetzen und dort sie wieder in ihre ursprünglichen Seitenkräfte zerlegen und parallel mit ihren Richtungen und es wird das anfängliche Gleichgewicht nicht gestört werden. Setzt man ferner P‴ und P^{V} in eine Mittelkraft zusammen, so muß sie der Spannung S″ des Seiles DB

gleich sein und in derselben Richtung liegen. Den Angriffspunkt B dieser Kraft kann man aber nach D versetzen, sie da wieder in ihre Seitenkräfte zerlegen, ohne das Gleichgewicht zu stören. So kann man auf gleiche Weise die Kräfte P^V und P^{VI} parallel zu sich selbst an den Punkt D versetzen.

Hieraus geht nun hervor: Wenn Kräfte an einem Seilpolygon sich im Gleichgewicht halten, so werden sie auch unter sich ein Gleichgewicht herstellen, wenn man sie sämmtlich parallel mit sich selbst an einen Punkt D versetzt.

Nehmen wir nun an, das Seilpolygon, Fig. 76, sei mit dem einen Ende in A und mit dem andern in B befestigt. An den festen Knoten C, D, E, F wirken in der durch die Punkte A und B gelegten verticalen Ebene die Kräfte P', P'', P''', P^{IV}... Die Winkel, welche die Richtungen derselben mit der Horizontallinie bilden, seien α', α'', α'''... Die Spannungen des ersten und letzten Seiltheils oder die Kräfte in A und B seien S und T, ihre Richtungswinkel δ und φ. Für den Zustand des Gleichgewichts hat man nun nach §. 33 folgende Bedingungsgleichungen:

$$S \cos \delta + P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \ldots + T \cos \varphi = 0$$
$$S \sin \delta + P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' + \ldots + T \sin \varphi = 0.$$

§. 98.

Nimmt man die Kräfte P', P''..., Fig. 77, als Gewichte an, so gehen ihre Richtungen vertical abwärts und die Winkel α', α'', α'''... werden alle gleich 90^0. Erwägt man noch, daß δ ein Winkel im vierten, φ ein Winkel im dritten Quadranten ist, so erhält man aus den Gleichungen des vorigen § folgende:

$$S \cos \delta - T \cos \varphi = 0$$
$$- S \sin \delta + P' + P'' + \ldots - T \sin \varphi = 0$$

oder auch

$$S \cos \delta = T \cos \varphi \ldots\ldots 1$$
$$S \sin \delta + T \sin \varphi = P' + P'' + P''' + \ldots 2.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

Wenn ein Seil durch Gewichte gespannt wird, so sind die Horizontalspannungen in den Aufhängepunkten A, B einander gleich. Ferner: die Summe der Verticalspannungen in diesen Punkten ist gleich der Summe sämmtlicher am Seile hängenden Gewichte.

Verlängert man die Seilrichtungen AC und BG bis sie sich im Punkte K schneiden, betrachtet diesen Punkt als den Angriffspunkt der Kräfte S und T, zerlegt diese Kräfte daselbst in horizontale und verticale Seitenkräfte, so werden sich die horizontalen, da sie gleich und entgegengesetzt sind, aufheben, die verticalen werden in eine Linie KL zusammenfallen. Vereinigt man letztere in eine einzige R, so ist:

$$R = S \sin \delta + T \sin \varphi$$

oder auch

$$R = P' + P'' + P''' \ldots 3.$$

Es ist demnach R die Mittelkraft sämmtlicher Gewichte oder der vertical wirkenden Parallelkräfte, und ihre Richtung muß folglich durch den Schwerpunkt dieser Gewichte gehen.

Sind die Winkel, welche R mit den Richtungen von S und T bildet, α, β, so findet man:

$$S = \frac{R \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \quad . \; . \; . \; 4.$$

$$T = \frac{R \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} \quad . \; . \; . \; 5.$$

Zerlegt man die Spannung S am Aufhängepunkt A in die Horizontalspannung $H = S \cos \delta$ und die Verticalspannung $V = S \, . \sin \delta$ und versetzt dieselben an den Knoten C, so kommt hier noch das Gewicht P′ zur Verticalspannung, während dem die Horizontalspannung ungeändert bleibt. Die Verticalspannung in diesem Punkte ist $V' = S \sin \delta - P' = V - P'$, die Horizontalspannung $H' = H$. Diese beiden Kräfte halten nun der folgenden Seilspannung S′ das Gleichgewicht und bilden die Axenspannung im Knoten C. Es ist nun $S' = \sqrt{H^2 + V'^2}$, und setzt man den Neigungswinkel dieser Spannung $= \delta'$, so ist:

$$\text{tang } \delta' = \frac{V'}{H} = \frac{S \sin \delta - P'}{S \cos \delta} = \text{tang } \delta - \frac{P'}{H}.$$

Versetzt man den Angriffspunkt der Kräfte H′ und V′ von C nach dem Knoten D, so kommt zu V′ noch das Gewicht P″, während H′ wieder ungeändert bleibt. Die horizontale Spannung in diesem Punkte D ist demnach $H'' = H' = H$, die verticale $V'' = V' - P'' = V \sin \delta - P' - P''$. Die Spannung des folgenden Seilstücks ist somit $S'' = \sqrt{H^2 + V^2}$ und wenn δ'' der Neigungswinkel ist, so hat man:

$$\text{tang } \delta'' = \frac{V''}{H} = \frac{S \sin \delta - (P' + P'')}{S \cos \delta} = \text{tang } \delta - \frac{P' + P''}{H}$$

u. s. w.

Hieraus folgt:

Die Horizontalspannung ist in allen Punkten des Seiles gleich. Die Verticalspannung in irgend einem Punkte ist gleich der Verticalspannung am darüber befindlichen Aufhängepunkt, weniger der Summe der über dem betrachteten Punkt hängenden Gewichte.

Die Axenspannungen in den Knoten und die Richtungen derselben lassen sich nach dem Obigen leicht berechnen.

§. 99.

Die Kettenlinie. Denkt man sich an dem Seilpolygon unendlich viele, unendlich nahe neben einander hängende Gewichte, so werden die Polygonseiten unendlich klein. Ein solches Seilpolygon kann dann als eine krumme Linie betrachtet werden, welche *Kettenlinie* genannt wird. Hängt man ein vollkommen biegsames Seil

oder eine Kette von sehr kleinen Gliedern mit beiden Endpunkten auf, so werden sie die Form einer Kettenlinie annehmen. Sind gleiche Theile des Seiles gleich schwer, so entsteht die gemeine Kettenlinie.

Es lassen sich sofort die Gesetze, welche bei dem Seilpolygon stattfinden, auch hier anwenden.

Zieht man an die Aufhängepunkte A und B der Kettenlinie, Fig. 78, die Tangenten und verlängert sie bis zu ihrem Durchschnittspunkt, so muß die durch diesen Punkt gehende Verticallinie durch den Schwerpunkt der Kettenlinie gehen. Nimmt man überhaupt zwei Punkte der Kettenlinie, so muß die Verticale, welche durch den Durchschnittspunkt der an die beiden Punkte gezogenen Tangenten geht, durch den Schwerpunkt des zwischen den beiden Punkten enthaltenen Stücks gehen.

Die Horizontalspannungen sind ferner in allen Punkten gleich. Die Verticalspannungen in den Aufhängepunkten sind zusammen dem Gewichte der Kette gleich.

Ist $\sphericalangle$ SAH $= \delta$, $\sphericalangle$ FBT $= \varphi$, so ist, wenn das Gewicht der Kette $=$ P gesetzt wird

$$S \sin \delta + T \sin \varphi = P.$$

Wird $\delta = \varphi$, so ist, weil $S \cos \delta = T \cos \varphi$, $S = T$, also auch $S \sin \delta = T \sin \varphi = \frac{P}{2}$, oder die Verticalspannung in jedem Aufhängepunkt ist in diesem Falle dem halben Gewichte der Kette gleich.

Nimmt man einen beliebigen Punkt D der Linie zwischen dem Scheitel C und dem Aufhängepunkt D an, so ist in diesem Punkte die Horizontalspannung $= S \cos \delta$; die Verticalspannung daselbst gleich der Verticalspannung im Punkte A, weniger dem Gewichte des Stücks AD der Linie. Da aber im Scheitel C die Tangente horizontal geht und die Richtung der Spannkraft in diesem Punkte anzeigt, so folgt, daß die Verticalspannung daselbst $=$ Null ist und demnach die Verticalspannung im Aufhängepunkt A dem Gewichte der Kette zwischen dem Scheitel C und dem Aufhängepunkt A gleich ist. Somit ist die Verticalspannung in D dem Gewichte des Kettentheils zwischen D und dem Scheitel C gleich. *Es ist also in jedem Punkt die Verticalspannung gleich dem Gewichte des unter demselben bis zum Scheitel befindlichen Kettentheils gleich.*

Mit Benutzung der Gleichungen 4 und 5 des §. 98 lassen sich diese Hauptresultate leicht herleiten.

§. 100.

Betrachten wir jetzt den speciellen Fall, bei welchem nicht gleiche Längen der Kettenlinie gleich schwer sind, sondern gleiche Horizontalprojectionen derselben gleiches Gewicht haben, wie dieß bei Ketten- und Drahtbrücken vorkommt. Es sei, Fig. 79, C der Scheitel oder tiefste Punkt der Kettenlinie, AH $=$ b der Horizontalabstand desselben

vom Aufhängepunkt A, CH = a der Verticalabstand beider Punkte. Für einen beliebigen Punkt E der Linie sei ED = y, CD = x der Horizontal- und Verticalabstand desselben vom Scheitel, δ der Neigungswinkel der Tangente an diesem Punkte gegen ED; S die Tangentialspannung daselbst und T diejenige am Scheitel, p das Gewicht der horizontalen Längeneinheit. Die Horizontalspannung in E und somit auch in C ist S cos δ, also T = S cos δ und die Verticalspannung in E ist V = S sin δ. Aus beiden Ausdrücken ergibt sich:

$$\text{tang}\,\delta = \frac{V}{T}.$$

Da aber V gleich dem Gewichte des Kettentheils EC ist und dieses wieder = py, so hat man

$$\text{tang}\,\delta = \frac{py}{T}\ \ldots\ 1.$$

Es sei nun EF = s ein unendlich kleiner Theil der Ordinate y und FG die dazu gehörige Normale, so wird man das $\triangle$ EFG als ein geradliniges ansehen können, woraus folgt

$$\text{tang}\,\delta = \frac{FG}{EF} = \frac{FG}{s}\ \ldots\ 2.$$

Aus 1 und 2 folgt:

$$\frac{FG}{s} = \frac{py}{T};\ FG = \frac{py}{T}\,.\,s\ \ldots\ 3.$$

Theilt man nun die Ordinate y in n gleiche Theile, wovon jeder gleich EF = s ist und errichtet in den Theilungspunkten die Normalen bis zur Kurve, zieht durch diese Kurvenpunkte Horizontallinien, setzt in Gl. 3 nach und nach für y die Werthe 1s, 2s, 3s, ... ns, so erhält man vom Scheitel an die einzelnen entsprechenden Theile der Abscisse x, addirt man sämmtliche Werthe, so erhält man die ganze zur Ordinate y gehörige Abscisse x. Man hat dann

$$CD = x = \frac{p}{T}\,.\,s^2\,(1 + 2 + 3 + \ldots n)$$

$$x = \frac{p}{T}\,.\,\frac{s^2\,n^2}{2}$$

und da ns = y, so folgt: $x = \frac{p}{T}\,.\,\frac{y^2}{2}$ und hieraus die Gleichung für diese Kettenlinie

$$y^2 = \frac{2T}{p}\,.\,x\ \ldots\ 4.$$

Dieß ist die Gleichung einer Parabel. Es folgt also, daß für die oben angenommene Art der Belastung die Kettenlinie eine Parabel ist, deren Parameter $= \frac{2T}{p}$.

Wird x = a der ganzen Pfeilhöhe, so wird y = b der halben Spannweite und man hat

$$b^2 = \frac{2T}{p} \cdot a$$

und hieraus $$T = \frac{pb^2}{2a} \ldots 5.$$

Hierdurch ist die Horizontalspannung im Aufhängepunkt oder die Kraft bestimmt, welche den Landpfeiler einer Kettenbrücke umzuwerfen sucht.

Aus 1 folgt nun für den Aufhängepunkt $\tang \delta = \frac{pb}{T}$, ferner ist $S = \frac{T}{\cos \delta} = T \sqrt{1 + \tang^2 \delta}$, daher folgt die Tangentialspannung daselbst:

$$S = \frac{pb}{2a} \sqrt{b^2 + 4a^2} \ldots 6.$$

Setzt man den Werth aus 5 in 4, so folgt

$$y^2 = \frac{b^2}{a} x \ldots 7.$$

Bezeichnet l die Länge der ganzen Kettenlinie, so findet man durch höhere Rechnung

$$l = 2b + \frac{4a^2}{3b} \ldots 8.$$

§. 101.

Unbiegsamkeit oder Steifigkeit der Seile. Wird ein vollkommen biegsames Seil um einen Cylinder, Fig. 80, gewickelt, an dessen Enden die Kräfte P und Q wirken, so wird für den Zustand des Gleichgewichts $P = Q$ sein, da die Hebelsarme derselben in Bezug auf die Axe des Cylinders gleich sind. Das Seil wird in diesem Falle die Form ABC annehmen, auch wenn der Cylinder sich um seine Axe dreht. In der Wirklichkeit sind aber die Seile nie vollkommen biegsam und bedürfen zu ihrer Biegung immer eine gewisse Kraft. Es wird dann die Kraft P, welche die Drehung bewirkt, nicht mehr gleich Q sein können, sondern man wird die Gleichung haben

$$P = Q + F,$$

wo F die durch die Unbiegsamkeit des Seiles nöthig gewordene Kraftvermehrung bedeutet. Man nennt dann F die **Unbiegsamkeit** des Seiles. Die Größe dieses Widerstandes läßt sich bis jetzt noch nicht genau, sondern nur annähernd ermitteln. Bedeutet r den Radius des Cylinders bis zur Mitte des Seiles, δ die Seildicke, k einen Erfahrungscoefficienten, so gibt die Erfahrung folgende am meisten gebräuchliche Formel:

$$F = k \cdot \frac{Q\delta^2}{r},$$

daher: $$P = Q + k \frac{Q\delta^2}{r}.$$

Das Seil wird bei der Hebung von Q die Form ABD annehmen und der Hebelsarm dieser Last also um eine gewisse Größe verlängert werden. Für den Gleichgewichtszustand hat man nun die Gleichung:

$$Pr = (Q + F)r = \left(Q + k\frac{Q\delta^2}{r}\right)r$$

$$Pr = Q\,(r + k\delta^2).$$

Es ist also $k\delta^2$ die durch die Unbiegsamkeit des Seiles entstandene Vergrößerung des Hebelsarms der Last Q.

Werden sämmtliche Dimensionen ausgedrückt in badischen Fußen,

so ist	$k = 5{,}58$
für badische Zolle ist . .	$k = 0{,}558$
„ bairische Fuß ist . . .	$k = 5{,}43$
„ rheinländische Fuß . .	$k = {}^1/_2$
„ württembergische Fuß .	$k = 5{,}33$
„ Millimeter	$k = 0{,}0186$
„ Centimeter	$k = 0{,}186$
„ Decimeter	$k = 1{,}86$
„ Meter	$k = 18{,}6.$

Für Bänder hat man δ statt δ^2 zu setzen.

Manche Schriftsteller nehmen als Annäherungswerth für die Vergrößerung des Hebelsarms

für neue . . Seile $= {}^1/_2\,\delta$
„ etwas gebrauchte $= {}^1/_3\,\delta$
„ stark gebrauchte $= {}^1/_4\,\delta$ bis ${}^1/_5\,\delta$.

Legt man eine Kette statt eines Seiles um den Cylinder, so muß bei der Drehung die an den Verbindungsbolzen oder Schnecken der Kettenglieder entstehende Reibung gleichfalls überwunden werden. Ist δ der Radius eines solchen Bolzens, μ' der Reibungscoefficient, so ist das Moment der Reibung in Bezug auf Drehung um die Axe dieses Bolzens $\mu'\delta Q$ und man hat das Moment der biegenden Kraft

$$Fr = \mu'\delta Q$$

daher ist $Pr = Qr + Fr = Qr + \mu'\delta Q$

oder $Pr = Q\,(r + \mu'\delta).$

Die Vergrößerung des Hebelsarms der Last ist also $\mu'\delta$. Wirkt die Kraft ebenfalls an einer solchen Kette, so findet eine ebenso große Verkürzung des Hebelsarms statt und man hat:

$$P\,(r - \mu'\delta) = Q\,(r + \mu'\delta).$$

Sechstes Kapitel.

Theorie der einfachen Maschinen.

§. 102.

Erklärung. Vorrichtungen, welche dazu dienen, die Wirkungen und Richtungen von Kräften fortzupflanzen und zu modificiren, um

andere Kräfte im Gleichgewicht zu erhalten oder zu überwältigen und Bewegungen nach bestimmten Zwecken hervorzubringen, nennt man Maschinen.

Bei den an einer Maschine thätigen Kräften unterscheidet man Kraft und Last. Unter Last versteht man denjenigen Widerstand oder die Kraft, welche zu überwinden ist; man nennt sie oft auch die Gegenkraft. Diejenige Kraft, welche die Last überwindet oder dieser das Gleichgewicht hält, heißt vorzugsweise Kraft.

Der Punkt, auf welchen die Kraft unmittelbar wirkt, heißt der Kraftpunkt, und derjenige, an welchem die Last angreift, der Lastpunkt.

Die Last theilt sich wieder in die Nutzlast und Nebenlast. Nutzlast ist derjenige Theil derselben, dessen Ueberwindung der Zweck der Maschine ist, Nebenlast dagegen derjenige Theil, der aus der Reibung und sonstigen Bewegungshindernissen entspringt. Nutzlast und Nebenlast bilden zusammen die Totallast.

Man theilt die Maschinen ein in einfache und zusammengesetzte. Einfach ist eine Maschine, wenn sie keine Bestandtheile besitzt, die wieder als Maschine betrachtet werden können; zusammengesetzt, wenn sie in einfache zerlegt werden kann.

Zu den einfachen Maschinen rechnet man:

1. den Hebel,
2. die Rolle,
3. das Rad an der Welle,
4. die schiefe Ebene,
5. den Keil,
6. die Schraube.

Diese sechs Elementarmaschinen nennt man auch die statischen oder mechanischen Potenzen.

Streng genommen sind nur der Hebel und die schiefe Ebene eigentliche Elementarmaschinen, indem die Rolle und das Rad an der Welle auf den Hebel, der Keil und die Schraube auf die schiefe Ebene sich gründen.

1. Vom Hebel.

§. 103.

Im Allgemeinen heißt jeder feste Körper, welcher durch eine feste Axe gehalten oder unterstützt ist, um die er sich, wenn Kräfte auf ihn wirken, drehen, aber keine fortschreitende Bewegung annehmen kann, ein Hebel.

Wird bei Bestimmung der Gleichgewichtsbedingungen zwischen den Kräften, welche auf den Hebel wirken, dieser als gewichtslos oder als eine feste unbiegsame Linie gedacht, so nennt man denselben einen mathematischen Hebel. Ist aber derselbe ein physischer Körper, so nennt man ihn einen physischen oder materiellen Hebel.

Ist Fig. 81 ACB ein Hebel, P die Kraft, Q die Last, so hat man an denselben namentlich drei Punkte zu unterscheiden, nämlich den Kraftpunkt A, den Lastpunkt B und den Stütz- oder Drehpunkt C.

Je nach der Lage dieser drei Punkte unterscheidet man drei Arten von Hebeln, den Hebel der ersten Art, Fig. 81, bei welchem der Stützpunkt zwischen Kraft- und Lastpunkt liegt, den Hebel der zweiten Art, Fig. 82, wobei der Lastpunkt zwischen Kraft- und Stützpunkt liegt, und den Hebel der dritten Art, Fig. 83, bei welchem der Kraftpunkt zwischen Last- und Stützpunkt liegt. Auch nennt man den Hebel der ersten Art den zweiarmigen, den Hebel der zweiten und dritten Art den einarmigen Hebel. Bilden die Theile des Hebels vom Drehpunkt nach den Angriffspunkten der Kraft und Last einen Winkel, Fig. 84, so nennt man denselben einen Winkelhebel.

Man unterscheidet ferner noch gerad- und krummlinigen Hebel, je nachdem das Verbindungsmittel der Punkte A, B, C eine gerade oder krumme Linie ist. Die Theile AC und BC nennt man auch oft die Hebelsarme; diese dürfen aber nicht verwechselt werden mit den statischen Hebelsarmen, welche bei Bestimmung des Gleichgewichts genommen werden müssen.

§. 104.

Gleichgewichtsbedingung am mathematischen Hebel. Die Gleichgewichtsbedingungen für den mathematischen Hebel sind bereits in dem ersten Kapitel begründet worden. Wirken an dem Hebel nur zwei Kräfte P und Q, welche Drehung nach entgegengesetzten Richtungen hervorzubringen suchen und sind p und q ihre Hebelsarme, so hat man für den Zustand des Gleichgewichts die Gleichung für alle Hebelarten:

$$Pp = Qq$$

d. h. das statische Moment der Kraft muß gleich sein dem statischen Momente der Last.

Aus dieser Gleichung folgt:

$$P : Q = q : p$$

d. h. die Kräfte verhalten sich umgekehrt wie ihre Hebelsarme.

Je größer also der Hebelsarm einer Kraft ist, desto weniger Kraft hat man nöthig, um eine Last im Gleichgewicht zu halten, und umgekehrt.

Für $p = q$ wird auch $P = Q$; für $p \gtrless q$ wird $P \lessgtr Q$.

Aus der Vergleichung der drei Hebelarten ergibt sich, daß mit dem Hebel der zweiten Art stets Kraft gewonnen, mit dem der dritten stets Kraft verloren wird. Bei dem der ersten Art kann beides stattfinden und auch die Kraft gleich der Last werden.

Beispiel 1. Ist bei dem geradlinigen horizontal liegenden Hebel, Fig. 81, AC = 20, BC = 3 Zoll und Q = 50 Pfd., so ist die vertical wirkende Kraft, welche das Gewicht im Gleichgewicht hält $P = \frac{Q \cdot BC}{AC} = \frac{50 \cdot 3}{20} = 7\frac{1}{2}$ Pfd.

Beisp. 2. Bei einem einarmigen Hebel, Fig. 82, sei P = 12 Pfd., Q = 80 Pfd. BC = 5 Zoll. Wie groß muß AC für den Zustand des Gleichgewichtes sein, wenn der Hebel geradlinig und horizontal ist und die Kräfte vertical wirken?

Aufl. Es ist $P.AC = Q.BC$, also $AC = \frac{Q.BC}{P} = \frac{80.5}{12} = 33^1/_3$ Zoll.

Beisp. 3. An einem geradlinigen Hebel, Fig. 81, hängen die Gewichte P und Q; wo muß man den Unterstützungspunkt C anbringen, damit Gleichgewicht bestehe?

Aufl. Es sei $AB = l$, $AC = x$, so hat man

$$Px = Q\ (l-x)$$

und daraus

$$x = \frac{Ql}{P+Q}.$$

§. 105.

Nehmen wir an, der horizontal liegende Hebel AB, Fig. 85, mache eine Drehung und komme in die Lage A'B', so werden die Angriffspunkte der Kräfte P, Q die Bogen AA', BB' beschreiben. Nun verhält sich

$$BC : AC = BB' : AA'$$

also

$$BC : AC = P : Q$$

$$P : Q = BB' : AA'$$

d. h. die Kräfte verhalten sich umgekehrt wie die von ihren Angriffspunkten gleichzeitig zurückgelegten Wege. Je kleiner also die Kraft ist, desto geschwinder muß sie sich bewegen.

Fällt man die Perpendikel B'b und A'a, so ist B'b die Höhe, auf welche die Last gehoben wird, während die Kraft um die Tiefe A'a herabsinkt, und es verhält sich ebenso:

$$P : Q = B'b : A'a.$$

Es ergibt sich hier der für alle Maschinen allgemeine Satz: Was an Kraft gewonnen wird, geht an Geschwindigkeit oder an Zeit verloren.

§. 106.

Zusammengesetzter Hebel. Werden mehrere ungleicharmige Hebel so mit einander verbunden, daß die Kraft am einen als Last am andern erscheint, so heißt eine solche Verbindung ein zusammengesetzter Hebel.

Die Hebelverbindung, Fig. 86, bestehe aus den drei ungleicharmigen Hebeln AB, BE, EG, deren Stützpunkte C, D, F seien. An A wirke die Kraft P, an G die Last Q, die Drücke in den Punkten B und E, welche die Hebelenden daselbst gegen einander ausüben, seien p und q, die Hebelsarme seien $AB = A$, $BC = a$, $BD = B$, $DE = b$, $EF = C$, $FG = c$. Für den Zustand des Gleichgewichts hat man nun bei den einzelnen Hebeln die Gleichungen:

$$P.A = p.a$$
$$p.B = q.b$$
$$q.C = Q.c$$

daraus:

$$P.A.B.C = Q.a.b.c$$

also

$$P : Q = a.b.c : A.B.C$$

d. h. die Kraft verhält sich zur Last, wie das Product der kurzen zum Producte der langen Hebelsarme.

Auch folgt:

$$P = \frac{Q \, . \, abc}{ABC}; \; Q = \frac{P \, . \, ABC}{abc}.$$

Beispiel. Es sei A = B = C = 10, a = b = c = 1, so ist

$$P = \frac{Q}{1000}, \quad Q = 1000 \; P.$$

§. 107.

Gleichgewichtsbedingung für den materiellen Hebel.

Bei dem materiellen Hebel ist noch die Kenntniß von der Lage des Schwerpunktes ein wesentliches Erforderniß. Hier muß man außer den gegebenen Kräften noch eine am Schwerpunkt vertical abwärts wirkende Kraft annehmen, die gleich dem Gewicht des Körpers ist. Alsdann wird derselbe wie ein mathematischer Hebel behandelt.

An den Enden A, B des Hebels der ersten Art, Fig. 87, wirken die Kräfte P, Q, deren Richtungen mit der horizontalen Mittellinie AB die Winkel α und β bilden, C sei der Drehpunkt, D der Schwerpunkt, W das Gewicht des Hebels. $AC = a$, $BC = b$, $CD = d$; $A'C$ und $B'C$ die Hebelsarme von P und Q. Für den Zustand des Gleichgewichts hat man nun die Gleichung:

$$P \, . \, A'C + W \, . \, CD = Q \, . \, B'C$$

oder, da $A'C = a \sin \alpha$, $B'C = b \sin \beta$,

$$P \, . \, a \sin \alpha + W \, . \, d = Q \, . \, b \sin \beta \; . \; . \; . \; 1.$$

Um den Druck R auf die Drehaxe zu bestimmen, zerlege man P und Q in horizontale und verticale Seitenkräfte, suche dann die Mittelkraft R sämmtlicher am Hebel thätigen Kräfte, so erhält man:

$$R^2 = (P \cos \alpha + Q \cos \beta)^2 + (P \sin \alpha + Q \sin \beta + W)^2 \ldots 2.$$

Bezeichnet φ den Winkel, welchen die Richtung von R mit der Horizontalen bildet, so ist:

$$\tang \varphi = \frac{P \sin \alpha + Q \sin \beta + W}{P \cos \alpha + Q \cos \beta} \; . \; . \; . \; 3.$$

Wenn P und Q vertical abwärts wirken, so wird $\alpha = \beta = 90^0$ und aus Gl. 1 wird:

$$Pa + W \, . \, d = Q \, . \, b \; . \; . \; . \; 4.$$

Aus Gl. 5 wird:

$$R = P + Q + W \; . \; . \; . \; 5$$

und aus 3

$$\tang \varphi = \frac{P + Q + W}{0} = \infty \; . \; . \; . \; 6$$

d. h. die Richtung von R geht rechtwinkelig durch AB.

Aufg. Es sei AB ein prismatischer Balken, dessen Länge 20 Fuß und Gewicht 300 Pfd. An B hänge eine Last von 600 Pfd., wie groß muß die in A vertical wirkende Kraft sein, wenn BC = 5 Fuß ist.

Aufl. Hier ist nach Gleichung 4 a = 15, b = 5, d = 5, W = 300, Q = 600, daher:

$$P = \frac{600 \, . \, 5 - 300 \, . \, 5}{15} = 100 \text{ Pfd.}$$

Ist b = 3, so wird d = 7, also

$$P = \frac{600.3 - 300.7}{15} = - 20 \text{ Pfd.}$$

Die Kraft P wird hier negativ, woraus folgt, daß sie in entgegengesetzter Richtung, also aufwärts wirken muß, um das Gleichgewicht herzustellen.

§. 108.

Betrachten wir nun den einarmigen Hebel AC, Fig. 88. Die Kräfte P und Q wirken unter den Richtungswinkeln α, β gegen die Horizontale AC. Ist wieder W das Gewicht des Hebels, D der Schwerpunkt AC = a, BC = b, DC = d, so hat man die Gleichung:

$$P.A'C = Q.B'C + W.CD$$

oder: $$P.a \sin \alpha = Q.b \sin \beta + W.d \ . \ . \ . \ 1.$$

Den Druck R auf die Drehare findet man auf ähnliche Weise wie oben:

$$R^2 = (P \cos \alpha + Q \cos \beta)^2 + (P \sin \alpha + Q \sin \beta + W)^2 \ . \ . \ . \ 2.$$

Wirken die Kräfte in verticaler Richtung, so wird $\alpha = 270^0$, $\beta = 90^0$, also $\sin \alpha = -1$, $\cos \alpha = 0$, $\sin \beta = 1$, $\cos \beta = 0$, daher:

$$P.a = Q.b + W.d \ . \ . \ . \ 3$$

$$R = Q + W - P \ . \ . \ . \ 4.$$

Aufg. Bei dem Sicherheitsventil einer Dampfmaschine, Fig. 89, sei AC = 18″; BC = 2″. Das Gewicht des Hebels im Schwerpunkt D vereinigt W = 3 Pfd., P = 10 Pfd., CD = 8″; welchen Druck kann das Ventil aushalten?

Aufl. Der Druck sei x Pfd., so ist

$$x.2 = 10.18 + 3.8 = 204$$

$$x = \frac{204}{2} = 102 \text{ Pfd.}$$

§. 109.

Es sei ACB, Fig. 90, ein Winkelhebel, dessen beide Arme AC und BC mit der durch die Drehare C gehenden Horizontalen MN die Winkel α, β bilden. An B hänge das Gewicht Q, an A wirke die Kraft P unter einem Winkel γ gegen AC. D, E seien die Schwerpunkte der beiden Arme, V und W die Gewichte derselben.

Setzt man AC = a, DC = a′, BC = b, EC = b′, zieht die Verticalen DH und EF nach MN, sowie CJ normal auf die Richtung von P, so ergibt sich die Gleichung für den Zustand des Gleichgewichts:

$$P.JC + V.CH = Q.GC + W.FC.$$

Nun ist aber $JC = a \sin \gamma$, $HC = a' \cos \alpha$, $GC = b \cos \beta$, $FC = b' \cos \beta$, daher auch:

$$Pa \sin \gamma + Va' \cos \alpha = Qb \cos \beta + Wb' \cos \beta \ . \ . \ . \ 1.$$

Um den Druck R auf die Drehare zu bestimmen, zerlege man P in eine horizontale Seitenkraft $P \cos (\gamma - \alpha)$ und eine verticale $P \sin (\gamma - \alpha)$, so ergibt sich leicht:

$$R^2 = P \cos (\gamma - \alpha)^2 + (P \sin (\gamma - \alpha) + V + W + Q)^2 \ . \ . \ 2.$$

Auch die Richtung des Drucks ist wie oben zu bestimmen.

Der Hebel findet in den Künsten und Gewerben die vielseitigsten Anwendungen. So beruhen z. B. auf dem Hebel der ersten Art: Der Hebelbaum, die Brechstange, die Wage, die Scheere, die Zange u. s. f. Auf dem der zweiten Art: Das Ruder, der Hebel bei einer Feuerspritze oder Druckpumpe, der Schubkarren u. s. f. Auf dem der dritten Art: Der Tritt bei einer Drehbank, einem Spinnrad, der Vorderarm des Menschen u. s. w.

Einige besondere Anwendungen des Hebels.

§. 110.

Die gemeine Krämerwage. Sie beruht auf dem gleicharmigen Hebel und besteht aus dem Wagebalken AB, Fig. 91, mit der auf ihm rechtwinkelig stehenden Zunge CE, der Scheere CD, den Ketten oder Schnüren und den daran hängenden Wageschalen. Bei manchen Wagen ist der Wagebalken nicht mittelst der Scheere aufgehängt, sondern durch ein Stativ unterstützt. Sobald die Verbindungslinie der beiden Aufhängepunkte der Wagschalen horizontal ist, muß die Zunge vertical sein oder mit der Richtung der Scheere zusammenfallen, d. h. sie muß einspielen.

Von einer guten Krämerwage fordert man, daß sie nur dann einspiele, wenn in beiden Wagschalen gleiches Gewicht liegt; daß sie Empfindlichkeit und Stabilität besitze, d. h. sie soll bei einem kleinen Uebergewichte in der einen Wagschale die horizontale Lage merklich verlassen. Der Abweichungswinkel von der horizontalen Lage heißt hiebei der Ausschlagwinkel. Nach Herstellung der Gleichheit der Gewichte in beiden Wagschalen soll sie nach wenigen Schwingungen wieder in die horizontale Lage zurückkehren.

Soll nun die Wage bei gleichen Gewichten einspielen, so müssen die beiden Hebelsarme vollkommen gleich sein. Der leere Wagebalken muß für sich einspielen, ebenso die ganze Wage. Es muß demnach der Schwerpunkt des Wagebalkens beim Einspielen vertical unter dem Stützpunkt liegen, weil dann sein statisches Moment $= 0$ ist. Deßgleichen muß beim Einspielen der ganzen Wage der Schwerpunkt sämmtlicher Theile in der durch den Stützpunkt gezogenen Verticallinie liegen. Bei Verwechslung der Wagschalen muß gleichfalls das Gleichgewicht fortbestehen.

Es sei P das Gewicht in der einen Wagschale, Q das in der andern, p der eine, q der andere Hebelsarm. Beim Einspielen ist dann $Pp = Qq$. Verwechselt man die Gewichte in den beiden Wagschalen, so muß wieder stattfinden $Pq = Qp$. Durch Multiplication beider Gleichungen ergibt sich $P^2pq = Q^2pq$, also $P = Q$ und ebenso $p = q$. Die Wage ist also richtig, wenn sie beim Vertauschen der Gewichte jedesmal einspielt.

Die Richtigkeit einer Wage läßt sich auch noch einfach untersuchen, wenn man nach einander zwei Gewichte P und P in der einen, mit einem dritten Q in der andern Wagschale in's Gleichge-

wicht bringt, dann werden jedenfalls die beiden ersten Gewichte unter sich, wenn auch nicht mit dem dritten, gleich sein. Legt man diese in Wagschalen und die Wage spielt ein, so ist $Pp = Pq$, also $p = q$; folglich die Wage richtig.

Ist die Wage falsch, so kann man mit derselben das Gewicht eines Körpers doch richtig finden. Es sei X das Gewicht eines Körpers und man finde dafür die Gewichte P und Q, je nachdem man ihn in die eine oder andere Wagschale legt. Man hat dann die Gleichungen: $Xp = Pq$ und $Xq = Qp$. Aus beiden folgt:

$$X^2pq = PQ.pq$$

also:

$$X = \sqrt{P.Q}.$$

Man findet also das wahre Gewicht, wenn man aus dem Producte der beiden gefundenen Gewichte die Quadratwurzel zieht.

Ist der Unterschied von P und Q klein und ist $Q = P + K$, so hat man auch: $X = \sqrt{P(P + K)} = \sqrt{P^2 + PK} = P + \frac{K}{2} - \frac{K^2}{8P} \dots$ Kann man nun die Glieder dieser Reihe nach dem zweiten Glied vernachlässigen, so ist: $X = P + \frac{K}{2} = P + \frac{Q - P}{2}$, oder:

$$X = \frac{P + Q}{2}.$$

Sind demnach die gefundenen Gewichte nur wenig verschieden, so ist das wahre Gewicht gleich dem arithmetischen Mittel aus beiden.

§. 111.

Um die Bedingungen kennen zu lernen, von welchen die Empfindlichkeit der Wage abhängt, nehmen wir an, es sei, Fig. 92, AB die Länge des Wagebalkens, C die Drehaxe; $AD = BE = m$ die senkrechte Entfernung der Aufhängepunkte D, E der beiden Wagschalen von der durch die Drehaxe gezogenen Horizontalen, $AC = BC = l$ die Hebelsarme, S der Schwerpunkt des unbelasteten Wagebalkens, $SC = d$ die senkrechte Entfernung desselben von der Drehaxe, W das Gewicht des Wagebalkens, P das in jeder Wagschale liegende Gewicht, w das Gewicht einer Wagschale nebst den Ketten oder Schnüren. CJ die verticale Stellung der Zunge. Durch ein Zulagegewicht Q in der einen Wagschale komme nun der Wagebalken aus seiner horizontalen Lage in die Lage A′B′ und bilde mit der vorigen den Ausschlagwinkel α; der Schwerpunkt komme nach S′, die Zunge in die Lage CJ′. Es ist nun der Hebelsarm der Wagschale mit dem Zulagegewicht $CF = CK - B'b = l \cos \alpha - m \sin \alpha$; der Hebelsarm der andern Wagschale ist $CG = Ch + D'a =$

$l \cos \alpha + m \sin \alpha$; der Hebelsarm vom Gewichte des Wagebalkens ist $S'H = d \sin \alpha$. Man erhält nun für den Zustand des Gleichgewichts die Gleichung:

$$(P + w + Q)(l \cos \alpha - m \sin \alpha) = (P + w)(l \cos \alpha + m \sin \alpha) + Wd \sin \alpha.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\tang \alpha = \frac{Ql}{[2(P + w) + Q]\, m + Wd}.$$

Hieraus folgt:

1. Der Ausschlagwinkel ist um so größer, je größer das Zulagegewicht Q ist.

2. Der Ausschlagwinkel oder auch die Empfindlichkeit wird um so größer, je länger der Wagebalken ist.

3. Je größer W oder das Gewicht des Wagebalkens ist, desto kleiner wird tang α, also desto weniger empfindlich die Wage.

4. Der Werth von tang α wird um so größer, je kleiner d wird, oder je näher der Schwerpunkt dem Stützpunkt zu liegen kommt, oder desto empfindlicher ist die Wage.

5. Die Empfindlichkeit nimmt ab, je schwerer die Gewichte P werden.

6. Mit der Zunahme von m wird die Empfindlichkeit kleiner und umgekehrt.

7. Wird $m = 0$ und $d = 0$, so wird tang $\alpha = \frac{Ql}{0} = \infty$, also $\alpha = 90^0$. Der Wagebalken wird also für das geringste Zulagegewicht in diesem Falle eine Drehung von 90^0 annehmen und an die Scheere anschlagen. Wird dabei noch $Q = 0$, so wird tang $\alpha = \frac{0}{0}$, d. h. der Wagebalken bleibt in jeder Lage in Ruhe, bei der Gleichheit der Gewichte in beiden Wagschalen. Die Wage ist also in diesem Fall unbrauchbar.

8. Wird blos $m = 0$, so ist tang $\alpha = \frac{Ql}{Wd}$. In diesem Falle hängt die Empfindlichkeit nicht von den aufgelegten Gewichten ab, was der Wage einen großen Vorzug gibt.

§. 112.

Die römische Wage oder Schnellwage. Sie beruht auf dem zweiarmigen ungleicharmigen Hebel. Sie besteht aus dem Wagebalken AB, der durch die Drehaxe C, Fig. 93, in zwei ungleiche Theile AC, BC getheilt wird, den Ketten mit der Wagschale oder auch nur einem Haken zur Aufnahme der Last und dem Läufergewicht, das auf dem längeren Arme verschoben werden kann. Der längere Arm hat eine Eintheilung, auf welchem das in die Wagschale gelegte Gewicht abgelesen werden kann, sobald der Läufer mit demselben in das Gleichgewicht gebracht ist.

Um zu untersuchen, wie die einzelnen Abtheilungen sich zu einander verhalten müssen, nehmen wir an, es sei Q das in die Wagschale gelegte Gewicht, W das des Wagebalkens sammt der leeren Wagschale, AD = d die Entfernung des Schwerpunktes D desselben von dem Aufhängepunkt A, P das constante Läufergewicht; AE = x, AC = a. Nimmt man den Stützpunkt C weg und bringt statt dessen die Kraft (P + Q + W) aufwärts an und betrachtet A als Drehpunkt, so hat man für's Gleichgewicht die Gleichung:

$$Px + Wd = (W + P + Q)\, a$$

$$x = \frac{(W + P + a) - Wd}{P} \; . \; . \; . \; 1.$$

Nimmt man an, es werde in die Wagschale noch eine Zulage Q′ gebracht, so muß zur Herstellung des Gleichgewichts der Läufer um die Länge z weiter hinausgerückt werden. Man hat alsdann die Gleichung:

$$P\,(x + z) + Wd = (W + P + Q + Q')\, a$$

$$x + z = \frac{(W + P + Q + Q')\, a - Wd}{P} \; . \; . \; . \; 2.$$

Zieht man 1 von 2 ab, so folgt:

$$z = \frac{Q' a}{P} \; . \; . \; . \; 3.$$

In diesem Ausdruck sind a und P constante Größen. Es hängt also z von Q′ ab und es folgt, daß die Abtheilungen auf dem Wagebalken für gleiche Gewichtszulagen gleich sein müssen.

Manche Wagen sind zum Abwiegen für leichtere und schwerere Lasten eingerichtet, weßhalb der Wagebalken mit zwei Drehaxen und zwei verschiedenen Eintheilungen versehen ist.

§. 113.

Nehmen wir an, der Läufer entferne sich um h, wodurch der Wagebalken aus seiner horizontalen Lage MN, Fig. 94, in die Lage AB komme, und bilde mit derselben den Ausschlagwinkel α. Die Entfernungen der Angriffspunkte der Gewichte P, W, Q von der durch den Drehpunkt gehenden AB seien u, t, m. Mit Beibehaltung der frühern Bezeichnungen hat man in Bezug auf den Drehpunkt C die Gleichung:

$$P\,[(x - a + h) \cos \alpha - u \sin \alpha] + W\,[(d - a) \cos \alpha - t \sin \alpha] = Q\,(a \cos \alpha + m \sin \alpha).$$

Substituirt man hierein den frühern Werth von x und reducirt gehörig, so folgt:

$$\text{tang}\, \alpha = \frac{Ph}{Qm + Wt + Pu}.$$

Hieraus ist zu ersehen, daß die Schnellwage um so empfindlicher ist, je kleiner die Größen Q, W, m, t, u sind, und daß die Empfindlichkeit unabhängig von der Länge des Wagebalkens ist.

§. 114.

Die Zeigerwage. Dieselbe ist, Fig. 95, ein ungleicharmiger Winkelhebel, welcher in C seinen Drehpunkt hat, in G eine Wagschale und am Ende A ein ständiges Gegengewicht trägt. Auf einer eingetheilten verticalen Scale BE werden die Gewichtseinheiten abgelesen. Im unbelasteten Zustande nimmt die Wage die Stellung HCB an, wo alsdann der Schwerpunkt derselben senkrecht unter den Drehpunkt zu liegen kommt. Das Gewicht des Hebels sammt der Wagschale sei Q, das in der Wagschale P, durch welches alsdann die Wage in die Lage ACD kommt. Sei ferner AC = a, BC = b, CG = d, BE = x, so ist, wenn AH, CF, BD perpendikulär zu CH, GJ, CD gezogen werden, für den Zustand des Gleichgewichts:

$$Q . AH = P . CF.$$

Nun ist $\triangle$ ACH $\sim$ $\triangle$ BCD, also verhält sich: AH : AC = BD : BC, oder: AH : a = BD : b, somit $AH = \frac{a . BD}{b}$. Ferner ist $\triangle$ CGF $\sim$ $\triangle$ BED, daher: CF : CG = BD : BE, oder: CF : d = BD : x, somit $CF = \frac{d . BD}{x}$. Setzt man die Werthe von AH und CF in obige Gleichung, so hat man:

$$\frac{Q . a . BD}{b} = \frac{P . d . BD}{x}$$

und daraus

$$x = \frac{P . b . d}{Q . a} \quad . \; . \; . \; 1.$$

Da nun Q, a, b, d unveränderliche Größen sind, so sind die Werthe von x und P direct zu einander proportional. Es müssen also die Abtheilungen auf der Scale für gleiche Gewichtszulagen gleich sein.

Es sei z die Länge einer Abtheilung und p die dazu gehörige Gewichtszunahme. Man setze in Gl. 1 P + p für P, x + z für x, ziehe dann Gl. 1 von dieser so erhaltenen Gleichung ab, so bestimmt sich:

$$z = \frac{pbd}{Qa} \quad . \; . \; . \; 2.$$

Diese Gleichung gibt die Empfindlichkeit der Wage zu erkennen und dient zur Eintheilung der Scale.

Eine andere Art Zeigerwage stellt Fig. 95a dar.

§. 115.

Die Straßenwage oder Brückenwage. Sie dient, um ganze Wagen mit ihrer Ladung abzuwiegen. Eine der vorzüglichsten Constructionen ist die von Schwilgué in Straßburg, Fig. 96. Sie besteht aus dem zweiarmigen Hebel ACB, dem einarmigen DEF und den beiden Gabelhebeln EGH, EJK. Die Dreharen dieser Hebel sind C, F, GH und JK. In gewöhnlichem Zustande ruht die Brücke,

auf welche der Wagen gefahren wird, auf den vier festen Stützen b. Die beiden Enden der Gabelhebel vereinigen sich in E mit einer verticalen Zugstange oder Zaume. In dem Gestelle L ist ein Räderwerk angebracht, wodurch der Hebel AB gehoben und gesenkt werden kann, welche Bewegung alsdann auch dem Hebel DF und somit den Gabelhebeln mitgetheilt wird. Ist nun die abzuwiegende Last auf die Brücke gebracht, dann wird der Hebel AB gehoben und es nehmen jetzt die auf den Gabelhebeln befindlichen vier Schneiden s, s', s'', s''' die Brücke mit ihrer Belastung auf, und es wird sofort das in die Wagschale nöthige Gewicht P gebracht. Die Wage ist immer so eingerichtet, daß sie unbelastet einspielt, und daß die auf die Brücke gebrachte Last Q sich beliebig auf die vier Schneiden oder Lastpunkte vertheilen kann. Um nun die Gleichung für diese Wage herzuleiten, seien ferner die Hebelsarme $AC = A$, $BC = a$, $DF = B$, $EF = b$, $Eg = C$, $fg = c$; Q', Q'', Q''', Q^{IV} die Belastung der oben genannten vier Schneiden der Reihe nach, X' die an E für den einen Gabelhebel nöthige Kraft zur Herstellung des Gleichgewichts, X'' für den andern, X der in E von beiden ausgeübte Verticalzug, Y die Spannung der Verbindungsstange BD. Für den einen Gabelhebel hat man dann die Gleichgewichtsbedingung:

$$X'C = Q'c + Q''c = (Q' + Q'')\,c$$

für den andern: $X''C = Q'''c + Q^{IV}c = (Q''' + Q^{IV})\,c$.

Daraus folgt durch Addition:

$$(X' + X'')\,C = (Q' + Q'' + Q''' + Q^{IV})\,c$$

oder: $XC = Qc$.

Ferner für FD: $YB = X.b$

für AB: $P.A = Y.a$

Also: $P.A.B.C = Q.a.b.c.$

Gewöhnlich ist $a = 1$, $A = 2$, $b = 1$, $B = 5$, $c = 1$, $C = 10$, somit

$$100P = Q$$

$$P = \frac{Q}{100}.$$

oder 1 Pfd. in der Wagschale gibt 1 Ctr. auf der Brücke.

§. 116.

Die tragbare Brückenwage von Quintenz. Sie besteht aus den Hebeln AB, GH und der Brücke EF, Fig. 97. Am Punkte A des erstern hängt die Wagschale, an den Punkten B, D hängen die Verbindungsstangen BH, DE. Die Brücke FE bildet eine Dreiecksform, worauf die Last Q gelegt wird, die sich auf die drei Punkte E, F', F'' beliebig vertheilt. Zur Herleitung der Gleichung sei $GJ = a$, $GH = A$, $BC = b$, $DC = c$, $AC = B$, X die Spannung der Stange BH, P das Gewicht in der Wagschale. Die Last Q vertheile sich so, daß Q' auf E, Q'', Q''' auf F' und F'' kommen. Für den Hebel GH hat man dann:

$$(Q'' + Q''')\,a = X.A \;.\;.\;.\; 1$$

und für AB: $$X.b + Q'c = P.B \;.\;.\;.\; 2.$$

Aus Gl. 1 X entwickelt und in 2 gesetzt, gibt:

$$(Q'' + Q''')\,\frac{ab}{A} + Q'c = P.B$$

$$(Q'' + Q''')\,ab + Q'.Ac = P.A.B.$$

Wird nun ab = Ac, oder a:A = c:b, d. i. GJ:GH = DC:BC, so hat man

$$(Q' + Q'' + Q''').Ac = P.A.B$$

oder: $$Q.Ac = P.A.B$$

$$Q.c = P.B.$$

Gewöhnlich ist nun c = 1, B = 10, daher:

$$Q = 10P$$

$$P = \frac{Q}{10}.$$

Es ist also die Last auf der Brücke das Zehnfache vom Gewicht in der Wagschale. Die Wage heißt deßhalb auch die Decimalwage.

Die Hebladen sind weitere Anwendungen des Hebels. Es zeigt Fig. 107a die deutsche, Fig. 107b die französische, Fig. 107c die schwedische Heblade. Die Wirkung ist aus den Figuren leicht zu erklären. Die Hebel haben veränderliche Stützpunkte.

2. Von der Rolle.

§. 117.

Jede cylindrische Scheibe, die sich um ihre Are drehen kann und auf deren Umfang eine Rinne, der Schnurlauf, zur Aufnahme eines Seiles, mittelst welchem sich zwei Kräfte gegenseitig im Gleichgewicht erhalten, ausgearbeitet ist, heißt eine Rolle. Sie dreht sich mittelst der Aren oder der Zapfen, welche auf beiden Seiten so weit hervortreten, daß sie in Höhlungen von andern Körpern, die man Zapfenlager, Hülsen oder auch Scheeren nennt, gelegt werden können, um sie dadurch zu unterstützen.

Diese Are ist entweder fest mit der Scheibe verbunden und dreht sich in den Arenlagern, oder sie ist fest in letzterm und die Scheibe dreht sich um dieselbe.

Wenn die Rolle sich blos um ihre Are drehen, mit dieser aber keine fortschreitende Bewegung annehmen kann, so heißt sie eine feste Rolle, auch Richtungsrolle. Kann sie aber außer der drehenden auch eine fortschreitende Bewegung annehmen, so heißt sie eine bewegliche, lose oder freie Rolle. Die erstere heißt auch: Rolle der ersten Art, letztere: Rolle der zweiten Art.

§. 118.

Gleichgewichtsbedingung für die feste Rolle Es sei, Fig. 98, r der Radius der Rolle bis zur Mitte des Seiles, ϱ der des Zapfens, μ' der Coefficient für Zapfenreibung, W das Gewicht

der Rolle und des Seils, P die Kraft, Q die Last, R der Druck auf das Zapfenlager, $k\delta^2$ habe die Bedeutung, die in §. 101 angegeben ist. Es ist nun $P.r$ das statische Moment der Kraft, $Q(r + k\delta^2)$ das der Last, $\mu'\varrho R$ das der Zapfenreibung, daher erhält man die Gleichung für das Gleichgewicht:

$$P.r = Q(r + k\delta^2) + \mu'\varrho R \;...\; 1.$$

Um nun den Zapfendruck R zu bestimmen, seien α und β die Winkel, welche die Seilrichtungen von P und Q mit der durch die Drehaxe C gehenden Horizontalen MN bilden. Zerlegt man P und Q in horizontale und verticale Seitenkräfte, so findet man zuletzt die Mittlere sämmtlicher Kräfte oder den Zapfendruck:

$$R = \sqrt{(P \sin\alpha + Q \sin\beta + W)^2 + (P \cos\alpha + Q \cos\beta)^2}.$$

Substituirt man diesen Werth in obige Gleichung, so folgt:

$$P.r = Q(r + k\delta^2) + \mu\varrho \sqrt{(P \sin\alpha + Q \sin\beta + W)^2 + P \cos\alpha + Q \cos\beta)^2} \;...\; 2.$$

Bezeichnet φ den Winkel, welchen die Richtung des Zapfendrucks mit MN bildet, so erhält man:

$$\text{tang}\, \varphi = \frac{P \sin\alpha + Q \sin\alpha + W}{P \cos\alpha + Q \cos\beta} \;...\; 3.$$

Mit Anwendung der Formel 5 des §. 23 hat man annähernd:

$$P.r = Q(r + k\delta^2) + \mu'\varrho\, [0{,}96\, (P \sin\alpha + Q \sin\beta + W) + 0{,}4\, (P \cos\alpha + Q \cos\beta)]$$

und hieraus:

$$P = \frac{Q(r + k\delta^2) + \mu'\varrho\, [0{,}96\, (Q \sin\beta + W) + 0{,}4\, .\, Q \cos\beta]}{r - 0{,}96\, \mu'\varrho \sin\alpha - 0{,}4\, \mu'\varrho \cos\alpha} \;...\; 4.$$

Sind die Seile vertical abwärts gerichtet, so wird $\alpha = \beta = 90^0$, daher $\sin\alpha = \sin\beta = 1$, $\cos\alpha = \cos\beta = 0$; somit erhält man aus 2:

$$P.r = Q(r + k\delta^2) + \mu'\varrho\, (P + Q + W)$$

$$P = \frac{Q.r + k\delta^2 + \mu'\varrho}{r - \mu'\varrho} + \frac{W.\mu'\varrho}{r - \mu'\varrho} \;...\; 5.$$

Setzt man $\frac{r + k\delta^2 + \mu'\varrho}{r - \mu'\varrho} = a$ und $\frac{\mu'\varrho}{r - \mu'\varrho} = b$, so ist

$$P = Q.a + W.b \;...\; 6.$$

Berücksichtigt man blos die Reibung, so wird $k\delta^2 = 0$; wird die Reibung vernachlässigt und blos die Unbiegsamkeit des Seiles berücksichtigt, so wird $\mu' = 0$. Die Gleichungen für diese Fälle sind leicht aus den obigen Gleichungen abzuleiten. Werden beide Widerstände außer Acht gelassen, so erhält man

$$Pr = Qr \quad \text{oder}$$

$$P = Q \;...\; 7$$

d. h. die Kraft ist gleich der Last. Mit dieser Rolle wird also keine Kraft gewonnen. Sie dient hauptsächlich zur Richtungsveränderung der Kräfte.

Beispiel. Es sei $r = 4''$; $\varrho = 0{,}5''$; $\delta = 1''$; $Q = 500$ Pfd.; $\mu' = 0{,}1$; $\alpha = \beta = 90^0$; $W = 8$ Pfd. Man soll P bestimmen.

Aufl. Nach §. 101 ist $k\delta^2 = 0,558 . 1^2 = 0,558$. Setzt man nun sämmtliche bekannte Werthe in Gl. 5, so erhält man: P = 583,39 Pfd. Die Bewegungshindernisse betragen also 83,39 Pfd., da ohne dieselben P = Q = 500 Pfd. wäre.

§. 119.

Gleichgewichtsbedingung für die freie Rolle. Betrachten wir zuerst eine immaterielle Rolle, und nehmen an, sie liege auf einem vollkommen biegsamen Seile, Fig. 99, das mit dem einen Ende in D befestigt sei, und am andern durch die Kraft P gehalten werde. Am Mittelpunkt C der Rolle hänge die Last Q. Betrachten wir den Tangirungspunkt B als Drehpunkt, so sind BF und BE die Hebelsarme von P und Q. Somit hat man für den Zustand des Gleichgewichts die Gleichung:

$$P . FB = Q . BE$$

oder:

$$P : Q = BE : FB.$$

Nun ist $\triangle ABF \sim \triangle BCE$, daher:

$$BE : FB = BC : AB.$$

Aus beiden Proportionen folgt:

$$P : Q = BC : AB \quad . \; . \; . \; 1$$

d. h. die Kraft verhält sich zur Last, wie der Radius der Rolle zur Sehne des vom Seile umschlungenen Bogens.

Wenn die Seilrichtungen, Fig. 100, vertical sind, so wird AB zum Durchmesser, also AB = 2 . BC, daher ist:

$$P : Q = BC : 2 . BC = 1 : 2$$

$$P = \frac{Q}{2} \quad . \; . \; . \; 2$$

d. h. die Kraft ist gleich der halben Last. Durch diese Rolle kann also Kraft erspart werden.

§. 120.

Um die Gleichung mit Rücksicht auf Reibung und Steifigkeit des Seils herzuleiten, sei Fig. 101, r der Radius der Rolle bis zur Mitte des Seils, ϱ der des Zapfens, μ' der Reibungscoefficient für den Zapfen, W das Gewicht der Rolle, Q die Last sammt Gewicht der Hülse, α, β die Winkel, welche die Seilrichtungen mit der durch den Mittelpunkt C gehenden Horizontalen MN bilden, P die Kraft, S die Spannung des Seiles BD. Man denke sich das Seil in D losgemacht, und die Kraft S nach BD wirksam, so wird im Gleichgewichtszustande dadurch nichts geändert. Zerlegt man die Kräfte P und Q in horizontale und verticale Seitenkräfte, betrachtet C als den Mittelpunkt der Momente, so hat man für's Gleichgewicht folgende drei Gleichungen:

$$P \cos \alpha + S \sin \beta = 0 \quad . \; . \; . \; 1$$

$$P \sin \alpha + S \sin \beta - W - Q = 0 \quad . \; . \; . \; 2$$

$$P . r - S \, (r + k\delta^2) - \mu' \varrho Q = 0 \quad . \; . \; . \; 3.$$

In den meisten Fällen kann man die Seile parallel oder vertical

abwärts wirkend annehmen, und es wird alsdann $\alpha = 90^0$, $\beta = 90^0$. Daher erhält man statt der obigen Gleichungen folgende:

$$P + S - W - Q = 0 \ldots 4$$

$$Pr - S(r + k\delta^2) - \mu'\varrho Q = 0 \ldots 5$$

hieraus ergibt sich:

$$P = Q . \frac{r + k\delta^2 + \mu'\varrho}{2r + k\delta^2} + W . \frac{r + k\delta^2}{2r + k\delta^2} \ldots 6$$

oder wenn man die Coefficienten von Q und W mit c und d bezeichnet:

$$P = Q . c + W . d \ldots 7.$$

Ferner ergibt sich die Spannung S:

$$S = Q . \frac{(r - \mu'\varrho)}{2r + k\delta^2} + W . \frac{r}{2r + k\delta^2} \ldots 8.$$

Wird keine Rücksicht auf die Hindernisse genommen, so wird $S = P$, daher aus Gl. 1 $\cos \alpha = - \cos \beta$; $\beta = (180 - \alpha)$. Die Seile haben also gleiche Neigung gegen MN. Ferner wird $\sin \alpha = \sin (180 - \alpha)$ oder $\sin \alpha = \sin \beta$. Somit aus Gleichung 2

$$2P \sin \alpha = Q + W$$

$$P = \frac{Q + W}{2 \sin \alpha} \ldots 9.$$

Für die verticale Richtung der Seile wird

$$P = \frac{Q + W}{2} \ldots 10.$$

Beispiel. Es sei $r = 0{,}15$ Mtr.; $\delta = 0{,}02$; $\varrho = 0{,}01$; $\mu' = 0{,}1$; $Q = 250$ Kilgr.; $W = 6$ Kilgr.; $\alpha = \beta = 90^0$. Man soll P bestimmen.

Aufl. Ohne Rücksicht auf die Hindernisse erhält man nach Gl. 10 $P = \frac{250 + 6}{2} = 128$ Kilgr. Mit Rücksicht auf dieselben, wenn man $\frac{\delta}{2} = 0{,}01$ $k\delta^2$ annimmt, nach Gl. 6. $P = 132, 9$ Kilgr.

§. 121.

Rollenzug. Verbindet man mehrere Rollen so mit einander, daß die Kraft an der einen als Last an der andern erscheint, so heißt eine solche Verbindung im Allgemeinen ein Rollenzug. An dem Rollenzug, Fig. 102, hänge die Last Q, welche von der Kraft P im Gleichgewicht erhalten wird. Die Halbmesser der als gewichtslos betrachteten Rollen seien der Reihe nach r', r'', r''' ..., die Sehnen der von den Seilen umschlungenen Bogen a', a'', a''' ... Die Seilspannungen oder die an den Rollen nöthigen Kräfte seien p', p'', p''' ... P. Ohne Rücksicht auf alle Hindernisse hat man nun:

$$p' = \frac{Qr'}{a'} ; p'' = \frac{p' . r''}{a''} = \frac{Q . r' . r''}{a' . a''} ;$$

$$p''' = \frac{p'' . r'''}{a'''} = \frac{Q . r' . r'' . r'''}{a' . a'' . a'''} .$$

So fortfahrend, erhält man zuletzt:

$$P = Q . \frac{r' . r'' . r''' \ldots r^n}{a' . a'' . a''' \ldots a^n} .$$

§. 122.

Potenzenzug. Wenn die Seile eines Rollenzugs sämmtlich parallel sind, so heißt derselbe ein Potenzenzug, Fig. 103. Es werden für denselben die Sehnen zu Durchmessern also $a' = 2r'$; $a'' = 2r''$, $a''' = 2r'''$ ... Substituirt man in die Gl. des vorigen §, so erhält man:

$$P = Q \cdot \frac{r' . r'' . r''' \ldots r^n}{2r' . 2r'' . 2r''' \ldots 2r^n} = \frac{Q}{2^n}$$

in welchem Ausdruck n die Anzahl der freien Rollen bedeutet. Die Kraft nimmt also nach Potenzen der Zahl 2 ab, wie die Anzahl der freien Rollen zunimmt, daher auch die Benennung.

§. 123.

Um die Gleichungen für den Potenzenzug mit Rücksicht auf die Hindernisse herzuleiten, nehmen wir die Radien der Rollen alle gleich an, und setzen das Gewicht einer jeden gleich W. Die Spannungen der an den Scheeren befestigten Seile seien wieder p', p'' ... p^n. Nach Gleichung 7, §. 120, hat man nun, wenn die dortigen Bezeichnungen beibehalten werden:

$$p' = Qc + Wd$$
$$p'' = p'c + Wd = Qc^2 + dW\,(c + 1)$$
$$p''' = p''c + Wd = Qc^3 + dW\,(c^2 + c + 1).$$

Indem man so fortfährt, erhält man zuletzt:

$$p^n = p^{n-1}\,c + Wd = Qc^n + dW\,(c^{n-1} + c^{n-2} + \ldots c^2 + c + 1)$$

oder: $$p^n = Qc^n + dW\left(\frac{c^n - 1}{c - 1}\right) \ldots 1.$$

Nun ist aber für die Handrolle nach Gl. 6, §. 118:

$$P = p^n . a + W . b$$

folglich erhält man:

$$P = ac^n\,Q + \left(\frac{c^n - 1}{c - 1} . ad + b\right) . W \ldots 2.$$

Werden Unbiegsamkeit der Seile und Reibung nicht berücksichtigt, so wird $c = \frac{1}{2}$, $a = 1$, $d = \frac{1}{2}$, $b = 0$, somit

$$P = \frac{Q - W}{2^n} + W \ldots 3.$$

Für die Anzahl der freien Rollen ergibt sich:

$$n = \frac{\log(Q - W) - \log(P - W)}{\log 2} \ldots 4.$$

Aufg. 1. An der Rollenverbindung, Fig. 100, die aus einer freien und einer festen Rolle besteht; hänge eine Last Q = 250 Kilgr. Die Radien beider Rollen seien $r = 0{,}15$ Mtr.; $\varrho = 0{,}01$ Mtr.; $\delta = 0{,}02$ Mtr.; $\mu' = 0{,}1$; $W = 6$ Kilgr. Man soll P bestimmen?

Aufl. Da hier nur eine freie Rolle vorkommt, so ist n = 1, und es wird für diesen Fall $P = (Qc + Wd) . a + Wb$. Nimmt man wieder $k\delta^2 = \frac{\delta}{2}$

$= 0{,}01$ Mtr. an, so findet man $a = 1{,}0805$; $b = 0{,}0067$; $c = 0{,}5193$; $d = 0{,}5161$. Substituirt man diese Werthe, so ergibt sich $P = 143{,}66$ Kilgr. Werden Reibung und Unbiegsamkeit des Seils vernachlässigt, so wird $P = 128$ Kilgr.

Aufg. 2. Bei einem Potenzenzug von 3 freien Rollen hat man eine Kraft von 50 Kilgr. zu verwenden. Welche Last kann damit gehoben werden, wenn jede Rolle 5 Kilgr. wiegt, und keine Hindernisse berücksichtigt werden?

Aufl. Aus Gl. 3 folgt: $Q = 2^n (P - W) + W$, also

$$Q = 2^3 (50 - 5) + 5 = 365 \text{ Kilgr.}$$

Fig. 103a stellt den sogenannten Schiffsrollenzug dar. Sind n Rollen vorhanden, so ist $P = \frac{Q}{2^n - 1}$.

§. 124.

Der Flaschenzug. Wenn mehrere Rollen in einem gemeinschaftlichen Gehäuse eingeschlossen werden, so nennt man diese Verbindung eine Flasche oder einen Kloben. Werden zwei Flaschen dadurch mit einander verbunden, daß ein Seil, dessen eines Ende an der einen Flasche befestigt ist, abwechselnd von einer zur andern über die darin befindlichen Rollen hin- und herläuft, so entsteht ein Flaschenzug. Die Flasche, an welcher unmittelbar die Last hängt, heißt die lose, freie oder bewegliche Flasche, die andere die feste Flasche oder Zugflasche.

Die Construction der Flaschen und Anordnung der Rollen ist sehr verschieden. Fig. 104, 105, 106, 107.

§. 125.

Gleichgewicht am Flaschenzug. Es sei Q die an der untern Flasche hängende Last, P die dazu nöthige Kraft, m die Anzahl der tragenden Seiltheile. Seilbiegung, Reibung, Gewicht der Rollen werden vorerst nicht berücksichtigt. Nimmt man an, es sei P mit Q im Gleichgewicht und das System mache eine kleine Bewegung, so zwar, daß die Last um den Weg w' gehoben werde, und die Kraft dabei ihrer Richtung nach den Weg w zurücklege, so muß nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten die Gleichung stattfinden:

$$Pw - Qw' = 0.$$

Wenn aber die Last um w' gehoben wird, so werden sich sämmtliche tragenden Seile um diese Größe w' verkürzen müssen. Die Seile bleiben aber anhaltend gespannt, und es muß daher die Kraft P einen Weg gleich m.w' zurücklegen. Demnach ist $w = m.w'$. Setzt man diesen Werth in obige Gleichung, so folgt:

$$P.mw' - Qw' = 0$$
$$Pm = Q$$
$$P = \frac{Q}{m}$$

d. h. die Kraft ist gleich der Last dividirt durch die Anzahl der tragenden Seile.

§. 126.

Will man die Gleichung für den Flaschenzug mit Rücksicht auf die Hindernisse herleiten, so müssen die für die feste und freie Rolle entwickelten Gleichungen hier angewendet werden. Für den Fall, der hier angenommen wird, daß die Seile parallel sind, werden aber die Ausdrücke für beide Rollenarten gleich, wenn das Gewicht der Rolle vernachlässigt wird. Denn setzt man in Gleichung 5 des §. 120 die beiden Seilspannungen $P + S$ für Q, so erhält man für die Spannung P denselben Ausdruck, wie in §. 118, Gleichung 5. Man kann also unter dieser Voraussetzung die freie Rolle wie eine feste betrachten. Behalten wir die früheren Bezeichnungen bei, und nehmen alle Rollendurchmesser gleich an, und setzen die Seilspannungen, Fig. 104, vom festen Ende an der Reihe nach $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n, p_{n+1}$, wo p_{n+1} die Spannung des Seilendes ist, woran P wirkt, daher auch $p_{n+1} = P$ sein muß. Nun ist aber nach der obigen Betrachtung:

$$p_2 r - p_1 (r + k\delta^2) - \mu' \varrho (p_1 + p_2) = 0$$

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{r + k\delta^2 + \mu' \varrho}{r - \mu' \varrho} \ldots 1.$$

Wird der Factor von p_1 mit A bezeichnet, so ist

$$p_2 = p_1 \, A.$$

Deßgleichen wird man erhalten:

$$p_3 = p_2 . A = p_1 . A^2$$
$$p_4 = p_3 . A = p_1 . A^3$$
$$\vdots$$
$$p_n = p_{n-1} . A = p_1 . A^{n-1}$$
$$p_{n+1} = p_n . A = p_1 . A^n$$

also $$P = p_1 . A^n \ldots 2.$$

Nun muß die Summe der Spannungen der tragenden Seile gleich sein der Last Q, mehr dem Gewicht W der untern Flasche, also:

$$p_1 (1 + A + A^2 + A^3 + \ldots A^{n-1}) = Q + W \ldots 3$$

oder $$p_1 \left(\frac{A^n - 1}{A - 1}\right) = Q + W.$$

also $$p_1 = (Q + W) . \frac{A - 1}{A^n - 1}.$$

Substituirt man diesen Werth in Gleichung 2, so erhält man:

$$P = \frac{A^{n+1} - A^n}{A^n - 1} . (Q + W) \ldots 4.$$

Für die Anzahl der Rollen:

$$n = \frac{\log P - \log [P - (Q + W) . (A - 1)]}{\log A} \ldots 5.$$

Werden Reibung und Seilbiegung vernachlässigt, so wird $A = 1$, also aus 3 $$p_1 . n = Q + W$$

und nach 2 $$P = \frac{Q + W}{n} \ldots 6.$$

Haben die Rollen verschiedene Durchmesser, so nimmt man aus allen das arithmetische Mittel, und rechnet damit.

Aufg. Es sei bei einem Flaschenzug die Anzahl der Tragseile $n = 8$; $r = 0{,}09$ Mtr.; $\varrho = 0{,}018$ Mtr.; $\delta = 0{,}02$ Mtr.; $\mu' = 0{,}19$; $(Q + W) = 600$ Kilgr. Man soll P bestimmen?

Aufl. Es ist für $k\delta^2 = \frac{\delta}{2} = 0{,}01$ der Werth von $A = 1{,}1945$; $A^9 = 4{,}951$; $A^8 = 4{,}1445$, also nach Formel 5

$$P = 153{,}8 \text{ Kilgr.}$$

ohne Rücksicht auf die Hindernisse

$$P = 75 \text{ Kilgr.}$$

3. Vom Rad an der Welle.

§. 127.

Wird eine Kreisscheibe, Fig. 108, mit einem auf ihrer Ebene normal stehenden Cylinder von geringerem Durchmesser concentrisch zu einem festen Systeme so verbunden, daß beide sich um dieselbe Axe drehen können, so heißt diese Verbindung Rad an der Welle oder Wellrad. Die Kreisscheibe heißt man das Rad, und den Cylinder die Welle. Die Welle ist an beiden Enden mit in der Richtung der Axe hervortretenden Zapfen versehen, welche in Zapfenlagern ruhen, worin sie sich frei drehen können.

Die Kraft wirkt gewöhnlich in der Peripherie des Rades nach der Richtung der Tangente, während die Last am Umfang der Welle gleichfalls tangential wirksam ist.

Liegt die Welle horizontal, so heißt das Wellrad ein Haspel. Dazu gehören der Hornhaspel, Fig. 109, der Kreuzhaspel, Fig. 110, das Spillrad, Fig. 111, u. s. w.

Wenn die Welle vertical steht, so heißt dasselbe eine Winde oder ein Göpel. Dazu gehört der Handgöpel, Fig. 112, der Pferdegöpel, Fig. 113, die Erdwinde, Fig. 114.

Ist das Rad so eingerichtet, daß Menschen oder Thiere darin herumgehend oder von außen auftretend die Umdrehung bewirken, so heißt es im ersten Falle ein Laufrad, Fig. 115, im andern ein Tretrad, Fig. 116. Hierher gehört auch die Tretscheibe, Fig. 117, deren Welle gegen den Horizont geneigt ist, deßgleichen die Gegenwinde, Fig. 118, deren Welle zwei verschiedene Durchmesser hat.

§. 128.

Gleichungen für's Gleichgewicht am Wellrad. Es sei Fig. 108, $AC = R$ der Radius des Rades, $BC = r$ der der Welle, ϱ der der Zapfen, W das Gewicht des Rades sammt der Welle, α und β die Winkel, welche die Richtungen der Kraft P und Last Q mit der durch die Drehaxe C gezogenen Horizontalen MN bilden. μ' der Coefficient für Zapfenreibung, D der Druck auf die beiden Zapfenlager. Es ergibt sich nun die Gleichung für's Gleichgewicht:

$$P.R = Q\,(r + k\delta^2) + \mu'\varrho D \;.\;.\;.\; 1.$$

Um den Druck D zu bestimmen, zerlege man P und Q in hori-

zontale und verticale Seitenkräfte, und bestimme die Mittlere sämmtlicher Kräfte, welche sofort den Druck darstellt und gleich ist.

$$D = \sqrt{(P \sin \alpha + Q \sin \beta + W)^2 + (P \cos \alpha + Q \cos \beta)^2}.$$

Setzt man diesen Werth in 1, so erhält man:

$$P.R = Q.(r + k\delta^2) + \mu' \varrho \sqrt{(P \sin \alpha + Q \sin \beta + W)^2 + (P \cos \alpha + Q \cos \beta)^2} \ldots 2$$

oder annähernd:

$$P.R = Q (r + k\delta^2) + \mu' \varrho [0,96 (P \sin \alpha + Q \sin \beta + W) + 0,4 (P \cos \alpha + Q \cos \beta)] \ldots 3.$$

Ist φ der Winkel, welchen die Richtung des Zapfendrucks mit MN bildet, so hat man:

$$\tang \varphi = \frac{P \sin \alpha + Q \sin \beta + W}{P \cos \alpha + Q \cos \beta} \ldots 4.$$

§. 129.

Für specielle Fälle sind die Gleichungen aus denen des vorigen Paragraphen herzuleiten.

Sind die Richtungen von P und Q vertical abwärts, Fig. 108 a, so wird $\alpha = \beta = 90$, daher erhält man:

$$P.R = Q (r + k\delta^2) + \mu' \varrho (P + Q + W)$$

$$P = \frac{Q (r + k\delta^2) + \mu' \varrho (Q + W)}{R - \mu' \varrho}.$$

§. 130.

Bei dem Laufrad wirkt die Kraft nicht nach der Tangente am Radumfang, sondern vertical abwärts an einem Punkte A, Fig. 115, dessen zugehöriger Radius mit der Verticalen den Winkel γ bildet. Hierbei wird $\alpha = 90^0$, der Hebelsarm der Kraft R $\sin \gamma$, somit:

$$P.R \sin \gamma = Q (r + k\delta^2) + \mu' \varrho \sqrt{(P + Q \sin \beta + W)^2 + Q^2 \cos^2 \beta}.$$

§. 131.

Bei dem Göpel kommt noch die Reibung an der Grundfläche des Zapfens in Betracht, welche durch das Gewicht der Welle sammt Rad verursacht wird, dagegen hat dieses Gewicht auf die Reibung am Umfang des Zapfens keinen Einfluß. Ist μ der Coefficient für die Reibung an der Grundfläche, so erhält man die Gleichung:

$$P.R = Q (r + k\delta^2) + \mu' \varrho \sqrt{(P \sin \alpha + Q \sin \beta)^2 + (P \cos \alpha + Q \cos \beta)^2} + \frac{2}{3} \mu \varrho W.$$

Aufg. 1. Bei einem Hornhaspel sei die Länge der Kurbel 1,8 Fuß, der Radius der Welle 0,4 Fuß, der des Zapfens 0,05, die Seildicke 0,08 Fuß. Das Gewicht der Welle 100 Pfd., die am Seil hängende Last 150 Pfd., der Coefficient für Zapfenreibung 0,12. Man soll die zur Hebung der Last nöthige Kraft berechnen?

Aufl. Nach der angenommenen Bezeichnung ist nun R = 1,8; r = 0,4 + 0,025 = 0,425; S = 0,08; $\mu' = 0,12$; W = 100; Q = 150. Substituirt man diese Werthe in §. 129, und setzt für ein schon gebrauchtes Seil $k\delta^2 = \frac{\delta}{2} = 0,025$, so erhält man: P = 39 Pfd. Ohne Rücksicht auf die Hindernisse ergibt sich P = 34,2 Pfd.

4. Von der schiefen Ebene.

§. 132.

Erklärung. Jede undurchdringlich feste, unter einem beliebigen Winkel gegen den Horizont geneigte Ebene, heißt eine schiefe Ebene.

Ist AB, Fig. 119, der Schnitt der schiefen Ebene durch eine Verticalebene, und ist AC horizontal, BC vertical, so nennt man in dem rechtwinkeligen Dreieck ABC, AB die Länge, AC die Grundlinie oder Basis, BC die Höhe und den Winkel BAC den Neigungswinkel oder Elevationswinkel der schiefen Ebene.

§. 133.

Gleichgewichtsbedingung für die schiefe Ebene. Auf der schiefen Ebene liege ein Körper vom Gewichte Q, am Schwerpunkt S desselben wirke unter dem Winkel β gegen die schiefe Ebene eine Kraft P, welche denselben im Gleichgewicht erhält. Um nun die Gleichgewichtsbedingungen herzuleiten, sei $\sphericalangle$ BAC = α, AB = l, AC = b; BC = h. Man zerlege die Kräfte P und Q jede in zwei rechtwinkelige Seitenkräfte, wovon die eine normal auf die schiefe Ebene, die andere parallel mit derselben gerichtet ist. Die normalen Seitenkräfte sind: P sin β und Q cos α, die parallelen P cos β und Q sin α. Die Seitenkraft Q sin α heißt man die relative Schwere, sie sucht den Körper abwärts zu ziehen.

Wird nun vorderhand die Reibung nicht berücksichtigt, so muß die Seitenkraft P cos β der relativen Schwere gleich sein, wenn Gleichgewicht bestehen soll, somit muß die Gleichung stattfinden:

$$P \cos \beta = Q \sin \alpha \quad . \; . \; . \; 1.$$

Wenn P parallel mit AB gerichtet ist, Fig. 119a, so wird $\beta = 0$, $\cos \beta = 1$, daher:

$$P = Q \sin \alpha \quad . \; . \; . \; 2.$$

Da aber $\sin \alpha = \frac{h}{l}$, so hat man auch

$$P = Q \cdot \frac{h}{l} \quad . \; . \; . \; 3.$$

oder:

$$P : Q = h : l$$

d. h. die Kraft verhält sich zur Last, wie die Höhe der schiefen Ebene zur Länge derselben.

Geht die Richtung von P parallel mit der Basis AC, Fig. 119b, so wird $\beta = \alpha$, daher folgt aus 1:

$$P.\cos\alpha = Q.\sin\alpha$$
$$P = Q.\text{tang}\,\alpha \quad \ldots \; 4.$$

Nun ist aber $\text{tang}\,\alpha = \frac{h}{b}$, daher wird

$$P = Q.\frac{h}{b} \quad \ldots \; 5$$

oder: $$P:Q = h:b$$

d. h. die Kraft verhält sich zur Last, wie die Höhe der schiefen Ebene zur Basis derselben.

Durch das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten lassen sich diese Resultate auch leicht herleiten.

§. 134.

Zur Herleitung der Gleichungen mit Rücksicht auf die Reibung behalten wir die obige Bezeichnung bei, und bezeichnen noch mit μ den Reibungscoefficient. Soll nun der Körper aufwärts gezogen werden, so muß außer der relativen Schwere auch noch die Reibung überwunden werden. Der Normaldruck ist aber $P \sin\beta + Q \cos\alpha$, daher die Reibung $\mu\,(P \sin\beta + Q \cos\alpha)$. Für die Bewegung aufwärts hat man sonach die Gleichgewichtsbedingung:

$$P \cos\beta = Q \sin\alpha + \mu\,(P \sin\beta + Q \cos\alpha)$$

und daraus:

$$P = \frac{Q\,(\sin\alpha + \mu \cos\alpha)}{\cos\beta - \mu \sin\beta} \quad \ldots \; 1.$$

Wird P parallel zu AB, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{ll} & P = Q\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \\ \text{oder:} & P = \frac{Q}{l}\,(h + \mu b) \end{array}\right\} \ldots \; 2.$$

Ist P parallel zu AC, so wird

$$\left.\begin{array}{ll} & P = Q.\frac{(\text{tang}\,\alpha + \mu)}{1 - \mu\,\text{tang}\,\alpha} \\ \text{oder:} & P = Q.\frac{h + \mu b}{b - \mu h} \end{array}\right\} \ldots \; 3.$$

Soll die Last auf der schiefen Ebene blos gehalten werden, so daß sie nicht abwärts gleitet, dann wirkt die Reibung zu Gunsten der Kraft, und man erhält für den Zustand des Gleichgewichts die Gleichung:

$$P \cos\beta + \mu\,(P \sin\beta + Q \cos\alpha) = Q \sin\alpha,$$

und hieraus:

$$P = \frac{Q\,(\sin\alpha - \mu \cos\alpha)}{\cos\beta + \mu \sin\beta} \quad \ldots \; 4.$$

Wird P parallel zu AB, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{ll} & P = Q\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \\ \text{oder:} & P = \frac{Q}{l}\,(h - \mu b) \end{array}\right\} \ldots \; 5.$$

Geht P parallel zur Basis, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} P &= Q \cdot \frac{\tan\alpha - \mu}{1 + \mu \tan\alpha} \\ \text{oder:} \quad P &= Q \cdot \frac{h - \mu b}{b + \mu h} \end{aligned}\right\} \ldots 6.$$

Für $P = 0$ erhält man aus Gleich. 4.

$$0 = \sin\alpha - \mu \cos\alpha$$

$$\tan\alpha = \mu.$$

Diesen so bestimmten Winkel heißt man den Reibungswinkel. Die Tangente des Reibungswinkels ist also dem Reibungscoefficienten gleich. Für diesen Winkel ist die Reibung im Gleichgewicht mit der relativen Schwere.

Aufg. 1. Auf einer schiefen Ebene von 40° Neigung soll ein Körper von 600 Kilogr. Gewicht aufwärts gezogen werden. Welche Kraft ist dazu erforderlich, wenn die Richtung derselben parallel der schiefen Ebene geht und der Reibungscoefficient 0,1 ist?

Aufl. Substituirt man die Werthe $Q = 600$; $\alpha = 40^0$; $\mu = 0{,}1$ in Gl. 2, so erhält man:

$$P = 600 \,(\sin 40^0 + 0{,}1 \,.\, \cos 40^0) = 431{,}63 \text{ Kilogr.}$$

Für das Erhalten der Last erhält man nach Gl. 5 $P = 339{,}70$ Kilogr. Ohne Rücksicht auf Reibung wird $P = 375{,}67$ Kilogr.

Aufg. 2. Welche Kraft wird bei der vorigen Aufgabe erforderlich sein, wenn die Richtung derselben parallel der Basis geht?

Aufl. Nach Gl. 3 erhält man:

$$P = 600 \,\frac{(\tan 40^0 + 0{,}1)}{1 - 0{,}1 \,.\, \tan 40^0} = 617{,}2 \text{ Kilogr.}$$

Für das bloße Erhalten der Last wird nach Gl. 6 $P = 409{,}4$ Kilogr. Ohne Rücksicht auf Reibung ist $P = 503{,}459$ Kilogr.

Aufg. 3. Auf derselben Axe C, Fig. 120, sind zwei Rollen von verschiedenen Halbmessern R, r befestigt, um welche Schnüre gelegt sind, an denen die Gewichte Q, Q' hängen, die auf den schiefen Ebenen AC und BC von gleicher Höhe und den Elevationswinkeln α, α' liegen. Man soll die Bedingung des Gleichgewichts ohne Rücksicht auf die Bewegungshindernisse herleiten?

Aufl. Denken wir uns, das System mache eine kleine Bewegung, so daß der Schwerpunkt D der Last Q nach D' und der Schwerpunkt d der Last Q' nach d' komme. Die Richtungen der Schnüre seien parallel den schiefen Ebenen. Projicirt man die von den Angriffspunkten oder Schwerpunkten zurückgelegten Wege auf die respectiven Kraftrichtungen, so sind diese Projectionen DE, de die virtuellen Geschwindigkeiten von Q und Q'. Daher muß die Gleichung stattfinden:

$$Q \,.\, DE - Q' \,.\, de = 0 \ldots 1.$$

Bei der gedachten Bewegung drehen sich nun die Rollen um einen Bogen φ für den Radius $= 1$. Demnach ist der Bogen, welchen der Umfang der Rolle F zurücklegt $= R\varphi$, welche Bogenlänge aber gleich DD' ist; der vom Umfang der Rolle f zurückgelegte Bogen ist $r\varphi = dd'$. Nun ist aber $DE = DD' \,.\, \sin\alpha = R\varphi \,.\, \sin\alpha$ und $de = dd' \,.\, \sin\alpha' = r\varphi \sin\alpha'$. Setzt man diese Werthe in obige Gleichung, so erhält man:

$$Q \,.\, R\varphi \sin\alpha - Q' \,.\, r\varphi \sin\alpha' = 0$$

oder:

$$Q \,.\, R \sin\alpha = Q' \,.\, r \,.\, \sin\alpha' \ldots 2.$$

Ist h die gemeinschaftliche Höhe, die Länge $AC = l$, $BC = l'$, so erhält man aus 2 leicht:

$$\frac{Q \,.\, R}{l} = \frac{Q' \,.\, r}{l'} \ldots 3.$$

Für $l = l'$ wird $Q \,.\, R = Q' \,.\, r$

oder $Q : Q' = r : R$.

Für $R = r$ wird aus 3 $Q : Q' = l : l'$.

5. Vom Keil.

§. 135.

Erklärung. Jedes normale dreiseitige Prisma, Fig. 121, welches bestimmt ist mit einer scharfen Kante zwischen zwei Körper oder zwischen die Theile eines Körpers einzudringen, um sie zu trennen oder zu spalten, wird ein Keil genannt.

Ist △ ABC der normale Querschnitt des Keils, so nennt man AB den Rücken oder Kopf, AC und BC die Seiten, C die Schärfe oder Schneide, den perpendikulären Abstand CD von AB die Höhe des Keils.

§. 136.

Gleichgewichtsbedingung für den Keil. Es sei der Querschnitt ABC ein gleichschenkeliges Dreieck, P die normal auf den Rücken wirkende Kraft, Q der auf beide Seiten normal wirkende Widerstand, $ACD = BCD = \alpha$ der halbe Winkel der beiden Seiten. Die drei Kräfte P, Q, Q müssen sich nun das Gleichgewicht halten. Denkt man sich ihre Richtungen in einer Ebene liegend verlängert, bis sie sich in E schneiden, so muß die Kraft P, welche nach DE wirkt, die Mittlere der beiden Widerstände auf den Seiten sein, daher muß stattfinden $P = 2Q \cos FEC = 2Q \,.\, \cos (90 - \alpha)$

oder $P = 2Q \,.\, \sin \alpha \;.\;.\;.\; 1.$

Nun ist $2 \sin \alpha = \frac{AB}{AC}$,

daher wird: $P = Q \,.\, \frac{AB}{AC}$,

oder $P : Q = AB : AC \;.\;.\;.\; 2.$

d. h. wenn der Widerstand oder die Last normal auf die Seiten des Keils wirkt, so verhält sich die Kraft zur Last, wie der Rücken des Keils zur Seite desselben.

Berücksichtigt man die Reibung und ist μ der Reibungscoefficient, so ist die Reibung auf jeder Seite μQ. Diese wirkt in der Richtung der Seiten. Die Mittelkraft der Reibung, welche in der Richtung CD der Kraft P entgegenwirkt, ist $2 \mu Q \cos \alpha$. Man erhält somit zur Ueberwindung des Widerstandes und der Reibung:

$$P = 2Q (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \;.\;.\;.\; 3.$$

Soll die Kraft P blos das Zurückgehen des Keiles verhindern, so wirkt die Reibung zum Vortheil von P und es ist dann:

$$P = 2Q (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \;.\;.\;.\; 4.$$

So lange nun $\sin \alpha > \mu \cos \alpha$ ist, wird immer der Keil gehalten werden müssen, wenn er nicht zurückgehen soll, oder es wird P positiv. Wird aber $\sin \alpha = \mu \cos \alpha$ oder $\tang \alpha = \mu$, dann wird $P = 0$ und der Keil wird durch die Reibung allein gehalten. Ist $\sin \alpha < \mu \cos \alpha$ oder $\tang \alpha < \mu$, so wird P negativ, d. h. man muß nach der Richtung CD eine Kraft anbringen, um der Reibung das Gleichgewicht zu halten.

§. 137.

Wirkt der Widerstand Q parallel zum Kopf des Keils, so kann man den Keil als zwei schiefe Ebenen betrachten, die mit ihrer Basis CD, Fig. 122, zusammenstoßen. Ohne Rücksicht auf Reibung hat man dann für jede der schiefen Ebenen die Kraft Q . tang α nöthig, daher erhält man die auf den Rücken wirkende Kraft, die mit dem Widerstand auf beiden Seiten im Gleichgewicht ist:

$$P = 2Q \,.\, \text{tang}\ \alpha \;.\;.\;.\; 1.$$

Nun ist $\text{tang}\ \alpha = \frac{AD}{DC}$, daher

$$P = \frac{Q \,.\, 2AD}{DC} = \frac{Q \,.\, AB}{DC}$$

oder $$P : Q = AB : DC \;.\;.\;.\; 2$$

d. h. die Kraft verhält sich zur Last, wie der Rücken zur Höhe des Keils.

Um die Kraft P mit Rücksicht auf die Reibung zu bestimmen, zerlege man Q auf beiden Seiten in zwei rechtwinkelige Seitenkräfte, normal und parallel zur Seite. Die letztere bleibt ohne Wirkung, die erstere ist Q cos α, daher die Reibung μQ cos α auf jeder Seite. Setzt man diese beiden gleichen Kräfte in eine Mittelkraft nach der Richtung CD zusammen, so ist diese gleich $2\mu Q \,.\, \cos^2 \alpha$. Es folgt dann:

$$P = 2Q\ (\text{tang}\ \alpha + \mu \cos^2 \alpha) \;.\;.\;.\; 3.$$

Soll blos das Zurückspringen des Keiles verhütet werden, so wirkt die Reibung im Sinne von P und man erhält

$$P = 2Q\ (\text{tang}\ \alpha - \mu \cos^2 \alpha) \;.\;.\;.\; 4.$$

Der Keil findet vielfältige Anwendung, z. B. bei den Keilpressen, Fig. 122a und 122b, bei der Oelpresse, Fig. 122c, beim Spalten des Holzes, der Steine, beim Befestigen von Maschinentheilen u. s. w., wobei immer die dabei stattfindende Reibung seine Brauchbarkeit wesentlich bedingt oder erhöht. Viele Werkzeuge beruhen auf dem Keil, z. B. das Messer, die Axt, der Meisel, die Säge, die Feile, die Raspel, der Hobel, der Nagel u. s. f.

6. Von der Schraube.

§. 138.

Erklärung. Wenn man den Mantel eines geraden Cylinders AC, Fig. 123, aufwickelt, so erhält man ein Rechteck abc′d′, dessen eine Seite ab der Höhe und die andere ad′ der Peripherie des Cylinders gleich ist. Theilt man nun die Seiten ab und d′c′ in eine gleiche Anzahl gleicher Theile und zieht die Transversalen aa′, hh′ . . ., so kann man diese ansehen als schiefe Ebenen von gleicher Höhe a′d′ und gleichem Neigungswinkel a′ad′ = α. Denkt man sich nun dieses Rechteck so um den Cylinder gewickelt, daß die Seiten ab und c′d mit AB und ad′ mit der Peripherie zusammenfallen, so werden die Transversalen auf dem Cylindermantel eine zusammenhängende krumme

Linie von durchaus gleicher Neigung bilden, welche Schraubenlinie genannt wird. Bei der Umwickelung werden die Punkte a, d′ mit A und a′, h mit G zusammenfallen u. s. w. Man heißt nun den ein und derselben Transversalen zugehörigen Theil, wie AFG = aa′ einen Schraubengang, aa′ die Länge, a′d′ = AG die Höhe oder Weite desselben. Der Winkel α heißt der Neigungswinkel der Schraubenlinie.

Denkt man sich einen prismatischen Körper nach der Schraubenlinie um den Cylinder gelegt, welcher nach der Axenrichtung immer denselben Querschnitt hat, so wird dieser auf dem Cylindermantel hervortretende Körper das Schraubengewinde genannt. Der Cylinder selbst heißt Kern. Gewinde und Kern bilden die Schraubenspindel.

Wird ein prismatischer Körper cylindrisch ausgebohrt, so daß der Kern der Spindel genau durchgeht, und werden dann noch in dessen Höhlung der Art Vertiefungen eingeschnitten, daß das Schraubengewinde genau hineinpaßt, so heißt derselbe die Schraubenmutter. Spindel und Mutter bilden zusammen die Schraube.

Ist der Querschnitt des Gewindes ein Rechteck abcd, Fig. 124, so hat man eine viereckige oder flachgängige Schraube; ist derselbe ein gleichseitiges oder gleichschenkeliges Dreieck abc, Fig. 125, so hat man eine dreieckige oder scharfgängige Schraube. Gehören alle Gänge ein und demselben Gewinde an, so ist die Schraube eine einfache oder eingängige, laufen aber mehrere Gewinde um den Kern, so ist sie eine mehrgängige, insbesondere eine zweifache, dreifache u. s. f.

In der Anwendung ist entweder die Mutter fest und die Spindel beweglich, oder umgekehrt, die Mutter ist beweglich und die Spindel fest.

§. 139.

Gleichgewichtsbedingung für die Schraube. Es sei r der Radius der Schraube von der Axe bis zur halben Dicke des Gewindes gerechnet; h die Höhe des Schraubengangs; l die Länge desselben; α der Neigungswinkel, so ist die Peripherie $= 2r\pi$, daher

$$l = \sqrt{4\,r^2\,\pi^2 + h^2} \;\ldots\; 1$$

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{h}{2r\pi} \;\ldots\ldots\; 2.$$

Nehmen wir an, die Mutter sei unbeweglich und es wirke nach der Axenrichtung der Spindel, Fig. 126, eine Last Q, nach der Tangente an die Spindel die Kraft P, welche mit Q im Gleichgewicht ist. Man kann nun annehmen, beide Kräfte halten sich auf einer schiefen Ebene im Gleichgewicht, wobei P parallel der Basis wirkt. Hiernach hat man die Gleichung:

$$P = Q \,.\, \text{tang}\,\alpha$$

oder, wenn der Werth aus Gl. 2 gesetzt wird,

$$P = Q \,.\, \frac{h}{2r\pi} \;\ldots\; 3$$

$$P \cdot 2r\pi = Q \cdot h \; . \; . \; . \; 4$$
$$P : Q = h : 2r\pi \; . \; . \; . \; 5$$

d. h. die Kraft verhält sich zur Last wie die Höhe des Schraubenganges zur Peripherie der Schraube.

Wirkt die Kraft P, was meistens der Fall ist, an einem Hebelsarm R, Fig. 125a, so ist die an die Peripherie der Spindel reducirte Kraft $= P \cdot \frac{R}{r}$. Wird dieser Werth statt P in Gl. 4 gesetzt, so erhält man:

$$P \cdot \frac{R}{r} \cdot 2r\pi = Q \cdot h$$
$$P \cdot 2R\pi = Q \cdot h \; . \; . \; . \; 6$$
$$P : Q = h : 2R\pi \; . \; . \; . \; 7$$

d. h. die Kraft verhält sich zur Last wie die Höhe des Schraubenganges zur Peripherie des Kreises, den der Angriffspunkt der Kraft bei einer Umdrehung durchläuft.

Obige Resultate lassen sich auch leicht durch das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten herleiten.

§. 140.

Wir wollen nun die Gleichung für die flachgängige Schraube mit Rücksicht auf die Reibung herleiten. Der Reibungscoefficient sei $= \mu$. Die Kraft wirkt an den Umfang, reducirt parallel der Peripherie, der Neigungswinkel ihrer Richtung gegen die Schraubenlinie ist daher $= \alpha$. Betrachtet man nun das Schraubengewinde als eine um den Kern der Spindel gelegte schiefe Ebene, so hat man hier den Fall, wo die Kraft $P \cdot \frac{R}{r}$ mit der Basis parallel geht. Man zerlege nun $P \cdot \frac{R}{r}$ und Q in rechtwinkelige Seitenkräfte parallel und normal zu dem Gewinde. Die parallelen sind $P \cdot \frac{R}{r} \cdot \cos\alpha$ und $Q \sin\alpha$, die normalen $P \cdot \frac{R}{r} \sin\alpha$ und $Q \cos\alpha$. Die Reibung ist somit auf dem Schraubengewinde oder auf dessen Mittellinie vereinigt $\mu\left(P \cdot \frac{R}{r} \sin\alpha + Q \cos\alpha\right)$. Soll nun die Last gehoben werden, so muß für's Gleichgewicht stattfinden:

$$P \cdot \frac{R}{r} \cdot \cos\alpha = Q \sin\alpha + \mu\left(P \cdot \frac{R}{r} \sin\alpha + Q \cos\alpha\right).$$

Hieraus folgt:

$$P = \frac{r}{R} \cdot Q \cdot \frac{\tang\alpha + \mu}{1 - \mu \tang\alpha} \; . \; . \; . \; 1$$

oder, da $\tang\alpha = \frac{h}{2r\pi}$, so folgt nach gehöriger Substitution und Reduction:

$$P = \frac{r}{R} \cdot Q \cdot \frac{h + 2r\pi\mu}{2r\pi - \mu h} \quad . \; . \; . \; 2.$$

Soll die Last Q nur gehalten, vor dem Zurückgehen gesichert werden, so ist die Reibung im Sinne von P wirksam und man erhält dann

$$P = \frac{r}{R} \cdot Q \cdot \frac{\tan \alpha - \mu}{1 + \mu \tan \alpha} \quad . \; . \; . \; 3$$

oder auch

$$P = \frac{r}{R} \cdot Q \cdot \frac{h - 2r\pi\mu}{2r\pi + \mu h} \quad . \; . \; . \; 4.$$

So lange nun $\tan \alpha > \mu$ ist, wird P positiv, oder es wird immer eine Kraft erforderlich sein, die nach der angenommenen Richtung wirkend, das Zurückgehen der Last verhindert. Wird $\tan \alpha = \mu$, so wird $P = 0$ und die Last wird gerade noch durch die Reibung gehalten; ist aber $\tan \alpha < \mu$, so wird P negativ, d. h. man kann in der entgegengesetzten Richtung, wie vorhin, eine Kraft wirken lassen bis Q sich anfängt abwärts zu bewegen.

Außer der Reibung am Gewinde kommt bei manchen Schrauben noch die Reibung an der Grundfläche der Spindel in Betracht, oder die Reibung der Schraubenmutter auf einer ihrer Grundflächen.

Von der Eigenschaft des Zurückspringens der Schraube wird bei Münzpressen, Prägwerken Anwendung gemacht.

Aufg. Bei einer flachgängigen Schraube sei $R = 0{,}16$ Mtr.; $r = 0{,}024$ M.; $h = 0{,}012$ M.; $\mu = 0{,}168$ M. Man soll das Verhältniß von P und Q bestimmen?

Aufl. Substituirt man die gegebenen Werthe in Gl. 2, so erhält man $P = \frac{Q}{26{,}3}$. Ohne Rücksicht auf Reibung wird $P = \frac{Q}{83{,}77}$.

Daraus ist zu ersehen, wie bedeutend die Reibung bei der Schraube ist.

§. 141.

Ohne Rücksicht auf Reibung ist die Gleichung für die scharfgängige Schraube dieselbe, wie bei der flachgängigen. Mit Berücksichtigung derselben gestaltet sich bei der scharfgängigen der Ausdruck für die Kraft etwas anders. Um denselben abzuleiten, wollen wir die bisherige Bezeichnung beibehalten. Ist ABC, Fig. 126, der durch die Axe geführte ebene Schnitt des Gewindes einer scharfgängigen Schraube, wobei ABC ein gleichschenkeliges Dreieck, dessen Grundlinie AB die Ganghöhe und CF die Höhe sei, so bezeichne ∢ BCF = ACF = β den Winkel, welchen die Neigung der Grundfläche mit der Horizontalen CF bildet. Sämmtliche Kräfte denke man sich auf der mittlern Schraubenlinie angreifend. Die Last Q und Kraft $P \cdot \frac{R}{r}$ wirken in dem früher schon angegebenen Sinne. Man zerlege diese beiden Kräfte, wie bei der flachgängigen Schraube, in zwei Seitenkräfte parallel und normal zur schiefen Ebene der Schraubenlinie, so erhält man die parallelen $P \cdot \frac{R}{r} \cos \alpha$ und $Q \sin \alpha$, die normalen $P \cdot \frac{R \sin \alpha}{r}$ und $Q \cos \alpha$.

Stellt nun DG diesen vertical wirkenden Normaldruck vor, so zerlege man denselben in zwei Seitenkräfte, wovon DE horizontal nach der Richtung des Radius und DF normal auf die schiefe Schraubenfläche gerichtet ist. Die erstere kann unberücksichtigt bleiben, da sie durch eine gleiche entgegengesetzt wirkende Kraft auf der andern Seite der Schraube aufgehoben wird, die letztere aber bewirkt die Reibung. Es ist nun $DF = \frac{DG}{\cos\beta}$. Da aber der Normaldruck auf die Schraubenlinie $DG = \frac{P.R}{r} \sin\alpha + Q \cos\alpha$ ist, so folgt:

$$DF = \frac{\frac{P.R}{r} . \sin\alpha + Q\cos\alpha}{\cos\beta}$$

folglich ist die Reibung $\mu \left\{ \frac{\frac{P.R}{r} \sin\alpha + Q\cos\alpha}{\cos\beta} \right\}$

Somit erhält man die Gleichung:

$$\frac{P.R}{r} . \cos\alpha = Q\sin\alpha \pm \mu \left\{ \frac{\frac{P.R}{r} \sin\alpha + Q\cos\alpha}{\cos\beta} \right\}$$

Hieraus ergibt sich:

$$P = \frac{r}{R} . Q . \frac{\tang\alpha\cos\beta \pm \mu}{\cos\beta \mp \mu\tang\alpha} \ . \ . \ . \ 1$$

oder: $$P = \frac{r}{R} . Q . \frac{h\cos\beta \pm 2r\pi\mu}{2r\pi\cos\beta \mp \mu h} \ . \ . \ . \ 2.$$

In diesen Gleichungen gilt das obere Zeichen für die Bewegung aufwärts, das untere für das bloße Erhalten der Last.

Setzt man $\beta = 0$, so erhält man die Gleichung für die flachgängige Schraube.

Aufg. Bei einer Schraube aus Eichenholz sei $R = 1{,}5$ Mtr.; $r = 0{,}1025$ M.; $h = 0{,}16$ Mtr.; $\mu = 0{,}143$ M.; $\beta = 45^0$. Man soll das Verhältniß zwischen Kraft und Last bestimmen?

Aufl. Es ist $\cos 45^0 = 0{,}7071$. Werden die gegebenen Werthe in Gl. 2 substituirt, so erhält man daraus $P = \frac{Q}{30{,}84}$. Fände keine Reibung statt, so wäre $P = \frac{Q}{58{,}9}$.

Die Figuren 126 a und 126 b stellen zwei häufig vorkommende einfache Pressen dar. Bei der ersten ist die Mutter fest und die Spindel beweglich, bei der andern findet das Umgekehrte statt. Außer bei den Pressen findet die Schraube in den Künsten und Gewerben noch vielseitige Anwendung; z. B. zum Heben von Lasten, zur Verbindung von Maschinen- und Bauelementen, zum Feststellen von Körpern, zur Hervorbringung von Bewegungen, z. B. bei Drehbänken, Bohrmaschinen, Stanzmaschinen. Durch die Mikrometerschraube werden bei den Theilungs- und Meßinstrumenten außerordentlich feine

Bewegungen erzielt. In größerem Maßstabe dient die Schraube als vorzügliches Bewegungsorgan bei den Schraubendampfschiffen, als Wasserhebezeug bei der archimedischen Schnecke.

Siebentes Kapitel.

Vom Räderwerk und einigen zusammengesetzten Maschinen.

Vom Räderwerk.

§. 142.

Einleitung. Sind mehrere auf verschiedenen Axen oder Wellen befindliche Räder so mit einander verbunden, daß durch die Umdrehung des einen Rades die andern ebenfalls bewegt werden, so nennt man eine solche Verbindung ein Räderwerk. Die Mittheilung der Bewegung zwischen diesen Rädern erfolgt entweder durch Seile, Riemen, Ketten, oder Schnüre ohne Ende, oder durch Reibung, welche die bloße Berührung der Radkränze bewirkt, oder dadurch, daß Erhöhungen des einen in die Vertiefungen des andern eingreifen. Solche an ihrem Umfange mit Hervorragungen und Vertiefungen versehenen Räder heißen Zahnräder. Die Hervorragungen heißen Zähne oder Kämme. Sie liegen entweder in der Richtung des Radius und dann heißt das Rad ein Stirnrad (Sternrad), oder parallel mit der Axe, rechtwinkelig auf dem Radius, dann heißt das Rad ein Kammrad oder Kronrad. Je nachdem die Axen der Räder mit einander parallel laufen oder gegen einander geneigt sind und sich schneiden, sind die Räder cylindrisch oder conisch geformt. Die conischen Räder heißen auch Winkelräder.

Greifen zwei ungleich große Räder in einander, so heißt das größere vorzugsweise Rad, das kleinere Getriebe und insbesondere ein Trilling oder Drehling, wenn es aus zwei parallelen Scheiben besteht, die mit cylindrischen Stäben, Triebstücke genannt, zusammengefügt sind.

Die Bewegung durch ein solches Räderwerk ist eine kreisförmige. Soll aber eine kreisförmige Bewegung in eine geradlinige übergeführt werden, so läßt man ein Zahnrad in eine gezahnte Stange eingreifen.

Wenn man die Abstände zweier parallelen Axen, Fig. 127, in zwei Theile theilt, daß sich dieselben umgekehrt wie die Umdrehungsgeschwindigkeiten der Räder verhalten, so nennt man die mit diesen Theilen CT, C'T beschriebenen sich berührenden Kreise die Theilkreise, Theilrisse, Grundkreise der betreffenden Räder, und ihre Radien CT, C'T die mechanischen Halbmesser. Auf diesen Kreisen wird die Eintheilung der Zähne vorgenommen. Der über den Theilriß hervorragende Theil des Zahns heißt der Kopf, der ein-

wärts gehende nach dem Mittelpunkt gerichtete heißt die Flanke, Wurzel oder Brust. Die auf dem Theilriß gemessene Entfernung von der Mitte eines Zahns bis zur Mitte des nächstfolgenden nennt man die Theilung oder Schrift.

Bei der Anordnung der gezahnten Räder hat man besondere Sorgfalt auf die Construction der Zähne zu verwenden. Diese werden nach gewissen krummen Linien construirt. Es sollen immer wenigstens zwei Zähne zugleich in Berührung sein. Hauptsächlich müssen die Räder mit gleichen Umfangsgeschwindigkeiten sich bewegen oder sich so drehen, als wickelte der eine Theilkreis sich auf dem andern ab. Ferner muß die Kraft vom einen Rad sich unverändert auf das andere übertragen.

Es stellt Fig. 127 ein Stirnrad mit einem Getriebe dar, Fig. 128 ein Kronrad mit einem Trilling, Fig. 128a conische Räder, Fig. 128b ein Zahnrad mit einer gezahnten Stange.

§. 143.

Gleichgewichtsbedingung. Bei einem Räderwerk von drei Rädern A, B, C, Fig. 129, hänge am Umfange der Welle des letzten Rades in H die Last Q, am Umfange des ersten Rades wirke in G die Kraft P tangential. Die Radien der Räder seien der Reihe nach R, R′, R″, die der Wellen oder Getriebe D, E, F seien r, r′, r″; die Drücke der Zähne aufeinander in den Punkten K und L seien p, p′. Man kann nun das Räderwerk als einen zusammengesetzten Hebel betrachten, und demzufolge erhält man für den Zustand des Gleichgewichts an den einzelnen Rädern der Reihe nach die Gleichungen und zwar: $P.R = p.r$ für A; $p'.R' = p'.r'$ für B; $p'.R'' = Q.r''$ für C. Durch Multiplication derselben erhält man die Gleichung für den Zustand des Gleichgewichts am Räderwerk:

$$P.R.R'.R'' = Q.r.r'.r''$$

oder:

$$P:Q = r.r'.r'':R.R'.R'' \quad . \; . \; . \; 1$$

d. h. die Kraft verhält sich zur Last, wie das Product der Radien der Getriebe zum Product der Radien der Räder.

Ferner ergibt sich:

$$P = \frac{Q.r.r'.r''}{R.R'.R''} \quad . \; . \; . \; 2.$$

$$Q = \frac{P.R.R'.R''}{r.r'.r''} \quad . \; . \; . \; 3.$$

Ist z. B. $r = r' = r'' = 1$; $R = R' = R'' = 6$, so ist $P = \frac{Q}{216}$.

§. 144.

Damit von einem gezahnten Rade und dem dazu gehörigen Getriebe gleich lange Bogen ihres Umfangs in gleicher Zeit fortgeschoben werden, so müssen diese Bogen auf gleichen Längen gleich viele

Zähne haben. So oft daher die Peripherie des Getriebes in der des zugehörigen Rades enthalten ist, so oft muß auch die Anzahl der Zähne des Getriebes in der Anzahl der Zähne des Rades enthalten sein. Die Peripherien verhalten sich aber wie die Radien, folglich verhält sich auch die Anzahl der Zähne zweier ineinander greifender Räder wie ihre Radien. Sind nun n, n′ die Anzahl der Zähne der Getriebe D, E und N, N′ die Anzahl der Zähne der Räder B, C, so ist $\frac{r}{R'} = \frac{n}{N}$; $\frac{r'}{R''} = \frac{n'}{N'}$; somit erhält man: $\frac{r.r'.r''}{R.R'.R''}$ $= \frac{n.n'.r''}{R.N.N'}$; daher

$$P = Q.\frac{n.n'.r''}{N.N'.R} \quad \ldots 1$$

$$Q = P.\frac{N.N'}{n.n'}.\frac{R}{r''} \quad \ldots 2.$$

Wenn das Verhältniß der Kräfte $\frac{P}{Q}$ gegeben ist, so zerfälle man den Bruch in so viele Bruchfactoren, als Radwellen angelegt werden sollen, dann geben die einzelnen Bruchfactoren das Verhältniß zwischen Welle oder Getriebe und dem zugehörigen Rade. Soll z. B. mittelst eines Räderwerks durch eine Kraft von 20 Kilgr. eine Last von 2800 Kilgr. in's Gleichgewicht gebracht werden, so ist $\frac{P}{Q} = \frac{20}{2800}$ $= \frac{r.r'.r''}{R.R'.R''}$ oder $\frac{P}{Q} = \frac{1}{280} = \frac{1.1.1}{4.5.7}$. Bei drei Rädern und drei Getrieben würden demnach, wenn die Radien der letztern alle gleich 1 gesetzt werden, die Radien der Räder die Größen 4, 5, 7 erhalten müssen.

§. 145.

Bestimmung der Zahnreibung. Es seien MN und M′N′, Fig. 130, die in A sich berührenden Theilkreise eines Rades und Getriebes, R, r deren Radien, C und C′ die Mittelpunkte; adc sei die Krümmung eines Radzahnes, C′d die Richtung der Flanke eines Getriebzahnes, b der äußerste Berührungspunkt beider Zähne, bA die gemeinschaftliche Normale, AD = P die am Theilkreise MN tangential wirkende Kraft, welcher das Getriebe eine gleiche Kraft entgegensetzt. Zerlegt man nun diese in zwei Seitenkräfte in AE nach der Richtung des Radius und in AB nach der Richtung der Normale, so wird erstere durch den Widerstand der Axe aufgehoben, letztere ist die Normalpressung im Punkte b und bewirkt die Zahnreibung, welche, wenn μ den Reibungscoefficient bezeichnet, sofort gleich ist: $\mu.AB$. Nun ist aber $\triangle ABD \sim \triangle AbC'$, daher

$$AD : AB = bC' : AC'$$

$$P : AB = bC' : r$$

$$AB = \frac{P.r}{bC'},$$

folglich die Reibung, welche nach der Richtung C'b wirkt, gleich

$$\frac{\mu P.r}{bC'}.$$

Der Hebelsarm dieser Reibung ist das auf C'f aus dem Centrum C gefällte Perpendikel Cf. Ist nun X die am Umfang des Rades zur Herstellung des Gleichgewichtes nöthige Kraft, so müssen die Momente beider einander gleich sein, daher muß stattfinden:

$$X.R = \frac{\mu P.r}{bC'}.Cf.$$

$$X = \frac{\mu P.r}{R}.\frac{Cf}{bC'} \ldots 1.$$

Nun ist $Cf : Ab = R + r : r$, also $Cf = \frac{R + r}{r}.Ab$; substituirt man diesen Werth von Cf in obige Gleichung, so wird

$$X = \mu P.\frac{R + r}{R}.\frac{Ab}{bC'} \ldots 2.$$

Aus diesem Ausdruck ist zu ersehen, daß die Zahnreibung um so größer wird, je weiter sich der Berührungspunkt b der Zähne von dem Berührungspunkt A der beiden Theilkreise entfernt oder je größer AB wird. Der Reibungswiderstand ist demnach im Punkte A auf der Mittelpunktslinie, wo der eine Zahn den andern ergreift, am kleinsten und zwar gleich Null, und im Punkte b, wo beide einander verlassen, am größten. Bezeichnet man den mittlern Reibungswiderstand mit F, so ist

$$F = \frac{0 + \mu P.\frac{R + r}{R}.\frac{Ab}{bC'}}{2}$$

$$F = \frac{1}{2}\mu P.\frac{R + r}{R}.\frac{Ab}{bC'}.$$

Ist nun $Ad = Aa = t$ die Theilung und die Anzahl der Zähne beträchtlich, so wird man, ohne für die Ausübung einen merklichen Fehler zu begehen, Ab mit t und bC' mit r verwechseln können, daher erhält man

$$F = \frac{t}{2}.\mu P.\frac{R + r}{R.r} = \frac{t}{2}.\mu P\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) \ldots 1.$$

Hat nun das Rad N, das Getriebe n Zähne, so ist $Nt = 2\pi R$; $nt = 2\pi r$, also $\frac{t}{2R} = \frac{\pi}{N}$ und $\frac{t}{2r} = \frac{\pi}{n}$, daher erhält man aus voriger Gleichung:

$$F = \pi\mu P.\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{n}\right) \ldots 2.$$

Die Reibung ist also um so kleiner, je größer die Anzahl Zähne.

Mit Berücksichtigung der Zahnreibung hat man demnach, wenn die Bezeichnung in Gl. 1, §. 144 beibehalten wird, für ein einfaches Räderwerk zur Bestimmung der Kraft:

$$P = \frac{r'.n}{R.N}\left[1 + \mu\pi\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{n}\right)\right] Q \ldots a$$

und für ein doppeltes Räderwerk:

$$P = \frac{r''}{R}.\frac{n}{N}.\frac{n'}{N'}.\left[1 + \mu\pi\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{n} + \frac{1}{N'} + \frac{1}{n'}\right)\right] Q \ldots b.$$

Wenn das Rad in eine gezahnte Stange eingreift, so wird $r = \infty$, daher wird aus 1:

$$F = \frac{\mu P.t}{2R} \ldots 3$$

oder auch

$$F = \frac{\mu P.\pi}{N} \ldots 4.$$

Aufg. Bei dem Räderwerk, Fig. 129, sei $R = 18$ Zoll, $r'' = 4$; $N = 24$; $N' = 30$; $n = n' = 6$; $Q = 600$ Pfd.; $\mu = 0{,}1$. Man soll P bestimmen.

Aufl. Setzt man diese Werthe in Gl. b, so erhält man $P = 7{,}479$ Pfd. Ohne Rücksicht auf Reibung $P = 6{,}66$ Pfd.

Betrachtung einiger zusammengesetzten Maschinen.

§. 146.

Die Schraube ohne Ende. Wenn man eine Schraube AB und ein Zahnrad MN, Fig. 131, mit einander verbindet, so daß die Schraubengewinde in die schief eingeschnittenen Zähne des Rades eingreifen und bei Umdrehung der Schraube das letztere gleichfalls bewegt wird, so nennt man diese Maschine **Schraube ohne Ende**. Dabei liegt die Axe der Schraubenspindel in der mittlern Ebene des Rades. Wird diese Maschine als Hebezeug benutzt, so wirkt die Kraft an einer Kurbel, welche an der Schraubenspindel befestigt ist, und die Last am Umfange einer mit dem Rade concentrischen Welle D.

Zur Herleitung der Gleichgewichtsbedingung sei P die an der Kurbel wirkende Kraft, Q die am Umfang der Welle an einem Seile hängende Last, R' der Radius des Kurbelkreises, h die Höhe des Schraubenganges, R der Radius des Zahnrades, r der der Welle, q der Druck zwischen den Zähnen des Rades und dem Schraubengewinde nach der Tangente an die Radebene. Sieht man von allen Hindernissen ab, so hat man für den Zustand des Gleichgewichtes an dem Zahnrad die Gleichung: $q.R = Q.r$, und daraus:

$$q = \frac{Q.r}{R}.$$

Es bildet nun q die am Schraubengewinde zu überwindende Last, daher hat man nach der Lehre von der Schraube für den Zustand des Gleichgewichtes an derselben:

$$P.2R'\pi = q.h.$$

Setzt man in diese Gleichung den obigen Werth von q, so erhält man:

$$2R.R'.\pi.P = Q.r.h$$

und hieraus: $$P = \frac{Q.r.h}{2R.R'.\pi} \quad \ldots 1.$$

Ist α der Neigungswinkel der Schraubenlinie gegen eine auf der Axe der Spindel normal stehenden Ebene, r' der Radius der Spindel, so ist $h = 2r'\pi.\text{tang}\,\alpha$, daher folgt auch:

$$P = \frac{Q.r.r'.\text{tang}\,\alpha}{R.R'} \quad \ldots 2.$$

Soll die Reibung an der Axe der Welle, am Gewinde, und die Steifigkeit des Seiles noch berücksichtigt werden, so sei ϱ der Zapfenradius der Welle, μ' der Coefficient für Zapfenreibung, δ die Seildicke, D die Resultante der auf die Zapfen wirkenden Kräfte, R der Radius des Theilkreises, N die Anzahl der Zähne des Rades. Man hat alsdann die Gleichung:

$$q.R = Q.(r + k\delta^2) + \mu'\varrho D.$$

Hieraus ist q zu bestimmen, welche Kraft die Reibung zwischen den Zähnen des Rades und dem Gewinde bewirkt. Der Hebelsarm dieser Kraft ist zwar veränderlich, da immer andere Punkte des Zahnes in Angriff kommen. Man kann jedoch den Radius des Theilkreises als den mittlern Hebelsarm annehmen. Die mittlere Radebene, welche die Spindelaxe enthält, schneidet bei angenommener flachgängiger Schraube die Gewinde in einer gegen diese Axe normalen Linie, und den Cylindermantel der durch den Berührungspunkt gehenden Schraubenlinie in einer zur Spindelaxe parallelen geraden Linie, und der Eingriff erfolgt so wie bei einem Zahnrad und einer gezahnten Stange. Die hier stattfindende Reibung ist demnach, wenn μ den Reibungscoefficient bezeichnet, $\frac{\mu\pi q}{N}$, daher die an dem Gewinde zu bewältigende Last $q\left(1 + \frac{\mu\pi}{N}\right)$. Setzt man diesen Werth für Q in die Gleichung 2, §. 140, so läßt sich P bestimmen.

§. 147.

Die gewöhnliche Fuhrmannswinde oder Wagenwinde. Die Wagenwinde dient in der Regel zum Heben von Lasten. Sie ist entweder einfach oder zusammengesetzt. Die einfache, Fig. 132, besteht aus einer gezahnten Stange AB, worauf die Last Q in der Richtung derselben drückt, einem Getriebe C, das mit seinen Zähnen in jene der Stange eingreift, und einer Kurbel CD, an welcher die Kraft P wirkt. Getriebe und Zahnstange sind in einem Gehäuse eingeschlossen.

Zur Herleitung der Gleichung für die einfache Winde sei R die Länge der Kurbel, ϱ der Zapfenradius des Getriebes C, n die Anzahl der Zähne desselben, μ' und μ die Reibungscoefficienten für Zapfen- und Zahnreibung, r der Radius des Getriebes, W das Gewicht des Getriebes und der Kurbel, D der Normaldruck auf die Lager der Getriebsaxe. Die Last Q wirkt auf die Zähne des Getriebes und

es ist die Reibung zwischen diesen und der Zahnstange $= \frac{\mu\pi Q}{n}$, wenn in Q das Gewicht der Zahnstange mit begriffen wird; also ist hier während der Bewegung ein Widerstand zu überwinden gleich $Q + \frac{\mu\pi Q}{n} = Q\left(1 + \frac{\mu\pi}{n}\right)$, wenn die Reibung der Zahnstange am Gehäuse nicht berücksichtigt wird. Nimmt man nun sämmtliche Kräfte vertical wirkend an, so ist der Zapfendruck $D = Q\left(1 + \frac{\mu\pi}{n}\right) + P + W$. Daher die Gleichung für den Gleichgewichtszustand:

$$P.R = Q\left(1 + \frac{\mu\pi}{n}\right).r + \mu'\varrho\left[Q\left(1 + \frac{\mu\pi}{n}\right) + P + W\right]$$

und hieraus:

$$P = \frac{Q\left(1 + \frac{\mu\pi}{n}\right)(r + \mu'\varrho) + \mu'\varrho W}{R - \mu'\varrho}.$$

§. 148.

Die zusammengesetzte Wagenwinde, Fig. 133, besteht aus einer gezahnten Stange AB, dem Zahnrad D, den beiden Getrieben C und E und der Kurbel EF. Damit die Last Q in jeder beliebigen Höhe erhalten werden kann, wenn die Kraft zu wirken aufhört, sind beide Arten von Winden noch mit einem an der Kurbelaxe sitzenden Sperrrad, in welches ein Sperrhaken eingreift, versehen. Zur möglichsten Verminderung der Reibung an der Zahnstange läßt man dieselbe auf Frictionsrollen b laufen.

Für die zusammengesetzte Winde sei außer der Bezeichnung im vorigen § noch N die Anzahl der Zähne des Rades D, R′ dessen Radius, W′ das Gewicht dieser Radwelle, P′ der Druck, den Zähne in k gegen einander ausüben. Man hat nun, wie für die einfache Winde, die Gleichung:

$$P' = \frac{Q\left(1 + \frac{\mu\pi}{n}\right)(r + \mu'\varrho) + \mu'\varrho W'}{R' - \mu'\varrho} \;\ldots\; 1.$$

Mit dieser Gleichung muß nun noch verbunden werden diejenige für den Theil der Kurbelwelle. Der zwischen den Zähnen in k ausgeübte Druck ist P′, daher die Reibung daselbst:

$$F = \mu\pi P\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{n}\right).$$

Folglich der an dem Umfang des Getriebes E wirkende Widerstand

$$= P'\left[1 + \mu\pi\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{n}\right)\right].$$

Betrachtet man diesen Widerstand als Last an dem Getriebe und leitet unter Annahme, daß sämmtliche Kräfte vertical wirken, die Glei-

chung für die Kurbelwelle mit Rücksicht auf die Axenreibung des Getriebes ab, so erhält man:

$$P = \frac{P'\left[1 + \mu\pi\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{n}\right)\right].(r + \mu'\varrho) + \mu'\varrho W}{R - \mu'\varrho}$$

$$P = \frac{P'\,[Nn + \mu\pi\,(N + n)].(r + \mu'\varrho) + \mu'\varrho NnW}{Nn\,(R - \mu'\varrho)} \quad . \; . \; . \; 2.$$

Der Werth von P′ ist nun aus Gl. 1 zu berechnen und in 2 zu substituiren.

§. 149.

Die englische Winde. Diese hat statt der gezahnten Stange der gewöhnlichen Winde eine Schraubenspindel E, Fig. 134, auf welche die Last Q wirkt. Die Mutter derselben bildet ein horizontal liegendes Zahnrad D, in dessen Zähne die Gewinde einer Schraube ohne Ende BC eingreifen, die an dem einen Ende eine Kurbel AB trägt, woran die Kraft P wirkt. Durch die Drehung der Schraube BC wird das Rad D, welches auf dem Gehäuse so aufliegt, daß die Reibung desselben möglichst gering wird, gedreht und dadurch die Spindel E mit der Last bewegt.

Um die Gleichung für diese Winde ohne Rücksicht auf Reibung herzuleiten, sei R der Radius des Zahnrades D, R′ der des Kurbelkreises, h die Höhe eines Schraubenganges der Spindel E, h′ die Höhe eines solchen der Schraube ohne Ende. P′ der Druck zwischen den Zähnen des Rades D und dem Gewinde der Schraube ohne Ende.

Für die Spindel BC hat man nun die Gleichung:

$$P.2R'.\pi = P'.h'$$

und für die Spindel E hat man:

$$P'.2R.\pi = Q.h.$$

Durch Multiplication der beiden Gleichungen erhält man:

$$P.4\pi^2 R.R' = Q.h.h'$$

oder:

$$P:Q = h.h' : 4\pi^2 R.R'.$$

§. 150.

Die Hebmaschine. Eine der einfachsten dieser Art zeigt Fig. 135. Sie ist gewöhnlich ganz aus Guß- und Schmiedeisen verfertigt. Das gußeiserne Gestelle trägt eine Welle D, um welche sich ein Seil windet, an dem die zu hebende Last Q hängt. An der Axe der Welle befindet sich ein Stirnrad E, in welches ein Getriebe C eingreift, an dessen Axe eine Kurbel F angebracht ist, woran die Kraft P wirkt. An dieser Axe befindet sich meistens noch ein Schwungrad. Außerdem ist diese Maschine, wie alle derartigen, mit einer Sperrvorrichtung versehen.

Zur Herleitung der Gleichung sei R der Radius des Zahnrades E, r der der Welle, ϱ der Zapfenhalbmesser der Welle, μ' der Reibungscoefficient für die Wellzapfen, W das Gewicht des Rades und der Welle, N die Anzahl der Zähne des Rades, R′ der Radius des

Kurbelkreises, r' der des Getriebes, ϱ' der der Zapfen des Getriebes, μ'' der Reibungscoefficient für diese Zapfen, W' das Gewicht der Kurbel und des Getriebes, μ der Coefficient für Zahnreibung, P' der Druck des Getriebzahns gegen den des Rades als horizontal wirkend angesehen.

Fassen wir zuerst das Rad und die Welle in's Auge, so ist hier die horizontale Kraft P', die verticalen Kräfte sind W + Q, demnach der Zapfendruck $= \sqrt{(Q + W)^2 + P'^2}$, somit erhält man die Momentengleichung:

$$P'.R = Q\,(r + k\delta^2) + \mu'\varrho \sqrt{(Q + W)^2 + P'^2},$$

oder annähernd:

$$P'.R = Q\,(r + k\delta^2) + \mu'\varrho\,[0{,}96\,(Q + W) + 0{,}4\,P']$$

und hieraus:

$$P' = \frac{Q\,(r + k\delta^2 + 0{,}96.\mu'\varrho) + 0{,}96.\mu'\varrho W}{R - 0{,}4\,\mu'\varrho} \quad \ldots 1.$$

Nun ist die Zahnreibung $\mu\pi P'.\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{n}\right)$, daher der Widerstand am Getriebe gleich

$$P'' = P' + \mu\pi P'\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{n}\right) = P'\left[1 + \mu\pi\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{n}\right)\right] \ldots 2.$$

Da nun bei zwei Kurbeln, welche in entgegengesetzter Richtung angebracht sind, die bewegende Kraft P keine Reibung bewirkt, so hat man als Reibung erzeugende Kräfte nur die horizontale P'' und die verticale W', daher der Zapfendruck $= \sqrt{P''^2 + W'^2}$ oder annähernd $= 0{,}96\,P'' + 0{,}4\,W'$. Man hat nun für die Getriebsaxe folgende Momentengleichung:

$$P.R' = P''r' + \mu''\varrho'\,(0{,}96\,P'' + 0{,}4\,W')$$

und hieraus:

$$P = \frac{P''\,(r' + 0{,}96\,\mu''\varrho'') + 0{,}4.\mu''\varrho' W'}{R'} \quad \ldots 3.$$

Mit Zuziehung der Gleichungen 1 und 2 erhält man aus 3 die bewegende Kraft P.

Ohne Rücksicht auf die Hindernisse erhält man leicht

$$P = \frac{Q.r.r'}{R.R'} \quad \ldots 4.$$

§. 151.

Der Krahne oder Kranich. Die Krahnen sind Aufzugsmaschinen, vermittelst welcher man Lasten heben und auch auf kleine Entfernungen in horizontalem Sinne transportiren kann. Sie sind je nach ihrem besonderen Zwecke auch verschieden construirt. Im Wesentlichen bestehen aber alle aus einer vertical stehenden Welle AB, Fig. 136, die um ihre Axe drehbar ist, aus einem horizontalen oder schiefstehenden Querarme CD, dem Schnabel, welcher mit dem obern Theile der Welle fest verbunden ist und durch eine Strebe E gestützt

wird; sodann aus einer Radwelle mit Sperrklinke oder aus einer Welle mit einer Kurbel und einem Zahnräderwerk F, G, H, welches an dem untern Theile der Welle angebracht ist, endlich aus einer Leitrolle am freien Ende des Schnabels, über welche das Seil geht, woran die Last hängt. Für schwerere Lasten nimmt man noch eine freie Rolle oder auch einen Flaschenzug zu Hilfe.

Bei den gußeisernen Krahnen, die an den Ufern der Flüsse zum Aus- und Beladen der Schiffe verwendet werden, bringt man gewöhnlich ein doppeltes Räderwerk von verschiedener Größe zu beiden Seiten der Seilwelle an, so daß man je nach der Schwere der Last durch eine Aus- und Einrückung das eine oder das andere benutzen kann. Wenn die Last bis zu einer gewissen Höhe gehoben ist, so wird der Krahne sammt der Last um die verticale Axe gedreht. Bei größeren Krahnen geschieht diese Drehung mittelst einer eigenen mechanischen Vorrichtung, Fig. 137.

Bei manchen Krahnen läßt sich die Last auch noch in der Richtung des Schnabels verschieben.

Außer den feststehenden hat man auch transportable Krahnen, die auf einem Gestelle mit Rädern ruhen, wodurch sie sammt ihrer Last an den Ort des Auf- und Abladens bewegt werden können. Einen solchen zeigt Fig. 137a.

Zur Herleitung der Gleichung nehmen wir einen der einfachsten, Fig. 136. Die Last Q hänge an einem Flaschenzug mit 4 Rollen, welcher an dem Schnabel befestigt ist. Das von demselben ausgehende Seil winde sich um die Welle oder Trommel G vom Radius $= r'$. Sei ferner R′ der Radius des Zahnrades F, r der des Getriebes H, R die Länge der Kurbel, woran die Kraft P wirkt, S die Spannung des vom Flaschenzug kommenden Seiles. Nun ist ohne alle Hindernisse $S = \frac{Q}{4}$, und

$$P = \frac{S \,.\, r \,.\, r'}{R \,.\, R'}$$

also:

$$P = \frac{Q \,.\, r \,.\, r'}{4 \,.\, R \,.\, R'}.$$

Soll die Gleichung mit Rücksicht auf Axenreibung, Zahnreibung, Steifigkeit des Seils hergeleitet werden, so suche man zuerst S nach §. 126, Gl. 4. Diese Spannung bildet die Last am Umfang der Welle G. Alsdann suche man den Axendruck auf die Lager der Wellaxe, bilde die Momentengleichung zwischen der Kraft, mit welcher die Zähne des Rades und Getriebes aufeinander wirken, der Axenreibung und Seilspannung. Sodann bestimme man die Zahnreibung, die zu der aus voriger Gleichung gefundenen Kraft addirt die Last an dem Getriebe abgibt. Nun suche man den Zapfendruck der Getriebsaxe und bilde die Gleichung zwischen der an der Kurbel wirkenden Kraft P und den an der Getriebsaxe vorhandenen Widerständen, woraus sich dann P bestimmen läßt.

Achtes Kapitel.

Von der Festigkeit der Materialien.

§. 152.

Einleitung. Unter Festigkeit eines Körpers versteht man den Widerstand, welchen er der Trennung seiner Theile entgegensetzt. Die Art und Weise, wie diese Trennung zu bewirken gesucht wird, bedingt die verschiedenen Arten von Festigkeiten. Der Körper widersteht nämlich mit einer andern Kraft der Trennung, wenn die trennende Kraft in der Richtung seiner Längenfasern zieht, als wenn diese rechtwinkelig gegen dieselben gerichtet ist, oder wenn sie ihn zu zerdrücken oder an einem Hebelsarm wirkend ihn zu verdrehen sucht.

Man unterscheidet demnach hauptsächlich:

1. Die absolute Festigkeit oder den Widerstand gegen das Zerreißen; Fig. 138.
2. Die relative Festigkeit oder den Widerstand gegen das Zerbrechen; Fig. 140.
3. Die rückwirkende Festigkeit oder den Widerstand gegen das Zerdrücken; Fig. 149.
4. Die Drehfestigkeit, Torsionsfestigkeit oder den Widerstand gegen das Verdrehen; Fig. 150.

Bevor die Trennung erfolgt, erleiden alle Körper eine mehr oder minder merkbare Formänderung. Beim Zerreißen werden sie länger, beim Zerbrechen biegen sie sich u. s. f. Die Fähigkeit der Körper, vermöge welcher sie nach Beseitigung der formändernden Kräfte ihre vorige Gestalt von selbst wieder herstellen können, nennt man Elasticität. Die Grenze, bis zu welcher die Formänderung gehen darf, damit die Herstellung der vorigen Gestalt wieder vollkommen erfolgen kann, nennt man die Elasticitätsgrenze. Wird diese Grenze überschritten, so ist immer eine bleibende Ausdehnung, Biegung u. s. w. die Folge. Daher ist es für die Anwendung von Wichtigkeit, die Körper nie so zu belasten, daß diese Grenze erreicht oder gar überschritten werde. Sie ist für verschiedene Materialien verschieden und muß für diese besonders ermittelt werden. Bei vollkommen elastischen Körpern würde jede derartige Formänderung nach Beseitigung der einwirkenden Kraft wieder verschwinden und bei unelastischen Körpern würde vor der Trennung gar keine Formänderung eintreten. Allein Körper in diesem strengen Sinne gibt es nicht. Die uns bekannten Körper sind unvollkommen elastisch.

Die Festigkeit desselben Materials ist auch nicht immer dieselbe, sondern hängt wieder von verschiedenen Umständen ab. So kommt es bei Holzarten sehr darauf an, auf welchem Boden sie gewachsen sind, auf ihr Alter, ob das Holz vom Stamme, den Aesten u. s. f. genommen ist. Bei Metallen kommt es darauf an, ob dieselben ge-

walzt, gegossen u. s. w. sind. Daraus lassen sich denn auch die Abweichungen erklären, welche die Versuchsresultate ergeben.

Absolute Festigkeit.

§. 153.

Maß dieser Festigkeit. Zahlreiche Versuche haben ergeben, daß, wenn die zerreißende Kraft in der Richtung der Längenfasern wirkt, die absolute Festigkeit dem kleinsten Querschnitte des Körpers proportional ist. Sind i und J die Querschnitte zweier Prismen von derselben Materie, f und F ihre absoluten Festigkeiten, so hat man:

$$F : f = J : i$$

$$F = \frac{f}{i} . J.$$

Wird der durch Versuche bestimmte Coefficient $\frac{f}{i} = w$ gesetzt, so hat man:

$$F = wJ.$$

Den Cofficienten w nennt man das Maß oder den Modul der absoluten Festigkeit.

Man findet also die absolute Festigkeit eines Körpers oder die Kraft zum Zerreißen, wenn man seinen Querschnitt mit dem Festigkeitsmodul multiplicirt.

Will man die Last bestimmen, welche der Körper noch mit Sicherheit tragen kann, so nimmt man bei Metallen höchstens $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{6}$, bei Hölzern und Lederriemen $\frac{1}{10}$, bei Hanfseilen $\frac{1}{2}$ der absoluten Festigkeit. Man hat demnach statt w beziehungsweise zu setzen $\frac{w}{4}$, $\frac{w}{6}$, $\frac{w}{10}$, $\frac{w}{2}$. Die dadurch aus dem Modul w erhaltene Zahl nennt man den Sicherheitsmodul. Nasse Seile tragen $\frac{1}{3}$ so viel als trockene, getheerte $\frac{2}{3}$ oder $\frac{3}{4}$ so viel als ungetheerte.

§. 154.

Tabelle über den Modul der absoluten Festigkeit verschiedener Körper für Quadratmillimeter in Kilogramm.

Name der Körper.	Modul für 1 □ Milli-Meter in Kilgr.	Name der Körper.	Modul für 1 □ Milli-Meter in Kilgr.
Holz:		Sommereiche: vom Kern .	18,22
Ahorn	12,23	„ vom Splint	10,11
Apfelbaum	7—14	Steineiche	9—10
Birke	10,54	Erle	9—16
Birnbaum	7—8	Esche	11—14
Buche (Rothbuche) . . .	8—15	Fichte (Rothtanne) . . .	7—10
Eiche	6—14	Kiefer	8—14

Name der Körper.	Modul für 1 □ Milli-Meter in Kilgr.	Name der Körper.	Modul für 1 □ Milli-Meter in Kilgr.
Kirschbaum	9,57	Eiserne Ketten	24—32
Lerche	6,25	Kanonenmetall	19—25
Linde	9—16	Kupfer, gegossen	13
Nußbaum	8—10	„ geschlagen . . .	25
Pappel	5,06	„ gewalzt . . .	20—26
Pflaume	6—8	„ Draht	21—69
Tanne (Weißtanne) . . .	8—10	Messing, gegossen . . .	12
Weißbuche	14	„ Draht . . .	40—85
Metalle:		Stahl	78—96
Blei, gegossen	1,4	„ gegossen	94
„ gewalzt	0,84—1,65	„ als Uhrfedern . .	140—188
„ Draht	1,4—2,5	Zinn, gegossen	4
Eisen, geschmiedet . . .	30—60	Zink, gegossen	1,99
„ gegossen	9—14	„ gewalzt	5
Eisenblech, in der Richtung des Walzens	36—45	Steine:	
„ normal auf diese Richtung .	33—39	Backsteine	0,2
Eisendraht	64—90	Kalksteine	0,14—0,6
		Hanfseile	5,1
		Lederriemen	2

Aufg. 1. Bei welchem Gewichte zerreißt eine Hängsäule aus Eichenholz, deren rechteckiger Querschnitt die Seiten 0,24 und 0,18 Mtr. hat?

Aufl. Die absolute Festigkeit ist $F = wJ$; nun hat man 0,24 Mtr. = 240 Millimtr.; 0,18 Mtr. = 180 Millimtr., daher $J = 240.180$ □Millimtr., nach der Tabelle ist $w = 6$, daher

$$F = 6.240.180 = 259200 \text{ Kilgr.}$$

Aufg. 2. Welchen Querschnitt muß man einer schmiedeisernen Hängsäule geben, wenn sie auf die Dauer 18000 Kilgr. tragen soll?

Aufl. Es ist $J = \frac{F}{w}$; für die Sicherheit hat man vom Festigkeitsmodul $\frac{1}{6}$ zu nehmen, daher wird statt 30 nur 5 genommen, also ist

$$J = \frac{18000}{5} = 3600 \text{ □Millimetr.}$$

§. 155.

Maß der Elasticität. Damit bei Belastung der Körper die Ausdehnung die Elasticitätsgrenze nicht überschreite, so muß man im Stande sein, die einer Belastung entsprechende Ausdehnung zu berechnen. Es haben Versuche dargethan, daß innerhalb der Elasticitätsgrenze die Ausdehnung und Zusammendrückung der Last proportional ist. Wird diese Grenze überschritten, so hört diese Proportionalität auf, und die Volumenänderung nimmt meist sehr schnell zu bis zum Zustande des Zerreißens oder Zerdrückens. Als Maß der Elasticität hat man den **Elasticitätsmodul**, welcher diejenige Kraft ausdrückt, die nöthig wäre, um einen Körper vom Querschnitte Eins (z. B. ein Quadratmillimeter) bis auf das Doppelte seiner anfänglichen Länge auszudehnen oder bis auf die Hälfte zusammenzudrücken. Dieser ist nun für verschiedene Stoffe zu ermitteln. Da es aber keinen

Körper gibt, welcher um seine eigene Länge ausgedehnt werden kann, ohne die Elasticitätsgrenze zu überschreiten, so ist der Elasticitätsmodul nur eine hypothetische Zahl, und gilt auch nur innerhalb der Elasticitätsgrenze.

Es sei nun AB = L die Länge eines Körpers AC, Fig. 139, J sein Querschnitt, P die Belastung desselben in der Richtung seiner Längenfasern, BG = λ die dieser Belastung entsprechende Ausdehnung, E der Elasticitätsmodul. Da nun E die Kraft ausdrückt, um einen Körper vom Querschnitt = 1 auf die Länge BK = L auszudehnen, so wird für einen Körper AC vom Querschnitte J, um ihn um seine Länge BK = AB = L auszudehnen, eine Kraft J.E nothwendig sein, da man denselben aus J nebeneinander liegenden Prismen betrachten kann, welche die Einheit zum Querschnitte haben. Demnach hat man die Proportion:

$$P : J.E = \lambda : L$$

und daraus

$$P = \frac{J.E.\lambda}{L} \quad \ldots 1$$

$$\lambda = \frac{P.L}{J.E} \quad \ldots 2.$$

Hieraus ist zu ersehen, daß die Ausdehnung direct proportional der Belastung und der Länge des Körpers, und umgekehrt proportional dem Querschnitt ist.

Es ist $\frac{P}{J}$ die Belastung für die Quadrateinheit. Setzt man diese p, so hat man:

$$\lambda = p.\frac{L}{E} \quad \ldots 3.$$

Für $\lambda = L$ wird $p = E$.

Es sei α für die Länge L = 1 die größte Ausdehnung bis zur Elastitätsgrenze, q die entsprechende Belastung, bei welcher also noch keine bleibende Ausdehnung erfolgt ist, so erhält man aus 3 die relative Ausdehnung:

$$\alpha = \frac{q}{E} \quad \ldots 4$$

$$q = \alpha.E.$$

Es ist also q die für die Quadrateinheit noch zulässige Belastung bis zur Elasticitätsgrenze und man nennt q den Tragmodul. Für einen Querschnitt J ergibt sich daher die zuläßige Belastung:

$$P = q.J.$$

Die obigen Formeln gelten auch innerhalb gewisser Grenzen für die Zusammendrückung eines Körpers.

§. 156.

Tabelle über den Elasticitätsmodul und die relative Ausdehnung bis zur Elasticitätsgrenze.

Name der Körper.	Ausdehnung an der Elasticitätsgrenze. α	Belastung hierzu für 1 □ Millimetr. in Kilgr. q	Elasticitätsmodul f. □ Millimeter in Kilgr. E
		Kilgr.	Kilgr.
Eiche	$^1/_{600} = 0{,}00167$	2.00	1200
Weißtanne	$^1/_{850} = 0{,}00117$	2.17	1300
Rothtanne oder Fichte	$^1/_{470} = 0{,}00210$	3.15	1500
Lerche	$^1/_{620} = 0{,}00192$	1.73	900
Buche, roth	$^1/_{570} = 0{,}00175$	1.63	930
Esche	$^1/_{885} = 0{,}00113$	1.27	1120
Ulme	$^1/_{414} = 0{,}00242$	2.33	970
Eisen in dünnen Dräthen	$^1/_{1250} = 0{,}00080$	14.75	18000
„ in Stäben	$^1/_{1520} = 0{,}00066$	12.205	20000
Stahl, deutscher, sehr guter	$^1/_{835} = 0{,}00120$	25.00	21000
„ Guß=, gehärtet	$^1/_{4500} = 0{,}00022$	66.00	30000
Gußeisen, feinkörnig	$^1/_{1200} = 0{,}00083$	10.00	12000
Kupferdraht			13000
Messingdraht	$^1/_{742} = 0{,}00135$	15.00	10000
Messing, gegossen	$^1/_{1320} = 0{,}00076$	4.80	6450
Kanonengut	$^1/_{1590} = 0{,}00063$	2.00	3200
Bleidraht (4 Mill. Durchm. rein)	$^1/_{1490} = 0{,}00067$	0.40	600
„ (6 Mill. Durchm. unrein)	$^1/_{2000} = 0{,}00050$	0.40	800
Blei, gewöhnliches, geschmolzen	$^1/_{477} = 0{,}00210$	1.00	500

Aufg. 1. Welches ist die Ausdehnung einer Hängsäule von Eichenholz, die 0,18 Mtr. dick; 0,24 Mtr. breit; 3 Metr. lang ist, und eine Last von 40000 Kilgr. zu tragen hat?

Aufl. Nach vorigem §, Gl. 2, ist $\lambda = \frac{P.L}{J.E} = \frac{40000.3000}{180.240.1200} =$ 2,314 Millimeter. Dieß gibt für die Längeneinheit eine Ausdehnung von $\frac{2{,}314}{3000} = \frac{1}{1296}$. Die relative Ausdehnung des Eichenholzes an der Elasticitätsgrenze beträgt aber $\alpha = \frac{1}{600}$, welche also hier lange nicht erreicht ist. Das angehängte Gewicht bringt demnach keine bleibende Ausdehnung hervor.

Aufg. 2. Welche Kraft ist erforderlich, um einen Eisendraht von 5 Meter Länge und 1 Millimeter Durchmesser um 1,5 Millimeter auszudehnen?

Aufl. Nach der erwähnten Gleichung ist L = 5000, $\lambda = 1{,}5$; E = 18000; $J = \frac{1^2.3{,}14}{4}$, daher

$$P = \frac{1^2.3{,}14.1{,}5.18000}{4.5000} = 4{,}239 \text{ Kilgr.}$$

Relative Festigkeit.

§. 157.

Bestimmung derselben. Wirkt eine Kraft rechtwinkelig auf die Richtung der Längenfaser oder die Längenrichtung eines Körpers,

so widersteht er mit seiner relativen Festigkeit, und dieselbe ist bestimmt durch die kleinste Kraft, welche den Bruch bewirkt. Ein prismatischer Körper AC, Fig. 140, sei in horizontaler Lage mit dem einen Ende fest eingemauert, und an dem andern durch ein Gewicht P belastet, das ihn zu brechen sucht. Bevor der Bruch erfolgt, wird eine Biegung des Körpers stattfinden. Dabei werden sich die obern Faserschichten verlängern, die unteren zusammendrücken oder verkürzen. Zwischen den ausgedehnten und zusammengedrückten Faserschichten wird offenbar eine sein müssen, die weder ausgedehnt, noch verkürzt ist, sondern ihre ursprüngliche Länge unveränderlich beibehält, und welche die Grenze zwischen den ausgedehnten und zusammengedrückten bildet. Diese Faserschicht nennt man die neutrale Faserschicht. Ist EF der verticale Längenschnitt derselben, so nennt man diese Kurve die elastische Linie.

Der Bruch wird jedenfalls in dem eingemauerten Querschnitt erfolgen, weil für diesen das Moment der brechenden Kraft am größten ist. Setzen wir voraus, daß alle Elemente des Querschnitts gleich stark dem Bruche widerstehen, so kann man sich sämmtliche widerstehende Kräfte im Schwerpunkt desselben vereinigt denken. Bei Erfolgung des Bruchs dreht sich aber der Körper um die unterste horizontale Kante A des Querschnitts. Es muß also das statische Moment der Kraft P dem statischen Momente der Mittelkraft jener Kräfte in Bezug auf diese Drehkante gleich sein. Es sei nun h die Höhe, b die Breite, l die Länge, J der Querschnitt des Körpers. Der Widerstand ist nun jedenfalls dem Querschnitte proportional, und kann daher ausgedrückt werden durch kJ, wenn k einen noch zu bestimmenden Coefficienten bezeichnet. Man hat sofort für den Zustand des Gleichgewichtes im Augenblick des Bruchs die Gleichung:

$$P . l = kJ . \frac{h}{2}$$

oder da $J = bh$

$$P = \frac{h}{2} . \frac{bh^2}{l}.$$

Setzt man $\frac{k}{2} = m$, so wird

$$P = \frac{mbh^2}{l} \quad \ldots 1.$$

Die relative Festigkeit ist also proportional der Breite, dem Quadrate der Höhe, und umgekehrt proportional der Länge. Den Coefficienten m, welcher durch Erfahrung zu ermitteln ist, heißt man das Maß oder den Modul der relativen Festigkeit, oder auch den Brechungscoefficienten.

Ist das Gewicht G des Balkens zu berücksichtigen, so ist dasselbe als eine im Schwerpunkt vertical abwärts wirkende Kraft zu betrachten. Für einen vorausgesetzten parallelepipedischen Balken hat man daher die Gleichung:

$$Pl + \frac{G.l}{2} = mbh^2$$

$$P = \frac{mbh^2}{l} - \frac{1}{2}.G \ldots 2.$$

Tabelle über den Modul der relativen Festigkeit.

Benennung der Körper.	Modul-Meter für Millimeter in Kilgr.	Benennung der Körper.	Modul-Meter für Millimeter in Kilgr.
Buchenholz	1,20	Gußeisen	5,00
Birke	1,09	Schmiedeisen	6,66
Eichenholz	1,16	Bildhauermarmor	0,24
Eschenholz	1,50	Sandstein	0,09
Tannenholz	1,00		

Soll die Last P bestimmt werden, welche der Körper für die Dauer zu tragen im Stande ist, so muß man bei Hölzer den 10ten und bei Eisen den 3ten bis 4ten Theil des obigen Coefficienten nehmen.

Aufg. Ein tannener Balken von 2,4 Metr. Länge; 0,12 Metr. Breite; 0,16 Metr. Höhe ist an dem einen Ende eingemauert und am freien Ende durch ein Gewicht belastet; welches ist seine relative Festigkeit? oder durch welches Gewicht wird der Bruch bewirkt werden, wenn das Gewicht des Balkens nicht berücksichtigt wird?

Aufl. Nach Formel 1 ist $m = 1,00$; $l = 2400$; $b = 120$; $h = 160$ Millimeter; daher $P = 1,00 . \frac{120 . 160^2}{2400} = 1280$ Kilogramm.

Für die Dauer dürfte der Balken nur mit 128 Kilogramm belastet werden.

§. 158.

Ist die Last P gleichförmig über den Balken verbreitet, so kann man sich dieselbe in der halben Länge, im Schwerpunkt angreifend denken, ihr Hebelsarm ist also $\frac{l}{2}$, daher erhält man:

$$P.\frac{l}{2} = mbh^2$$

$$P = \frac{2mbh^2}{l}$$

d. h. der gleichförmig belastete Balken trägt doppelt so viel, als wenn die Last am freien Ende angebracht ist.

§. 159.

Es sei der Balken an beiden Enden A und B, Fig. 141, in horizontaler Lage gestützt, und trage im Punkte C eine Last P, die ihn zu brechen sucht. Man setze $AB = l$, $AC = a$, nehme die Stützpunkte A, B weg, und bringe dafür die vertical aufwärts wirkenden Kräfte x, y an, welche jene ersetzen. Ohne Rücksicht auf das Gewicht des Balkens ist nun:

$$x = P \cdot \frac{(l - a)}{l}$$

$$y = P \cdot \frac{a}{l}.$$

Denkt man sich den Balken im Querschnitte C gestützt oder fest eingemauert, dann sind x und y die Kräfte, welche den Bruch in C zu bewirken suchen. Das Festigkeitsmoment des Querschnitts ist aber mbh^2, daher ist

$$x = \frac{mbh^2}{a}$$

$$y = \frac{mbh^2}{l - a}.$$

Setzt man die beiden für x gefundenen Werthe einander gleich, so erhält man:

$$\frac{P\,(l - a)}{l} = \frac{mbh^2}{a}$$

$$P = \frac{mbh^2 l}{a\,(l - a)} \quad \ldots \; 1.$$

Denselben Ausdruck erhält man, wenn man die beiden Werthe von y einander gleich setzt.

Wirkt die Kraft P in der Mitte des Balkens, so ist $a = \frac{l}{2}$, daher wird aus 1

$$P = 4\,\frac{mbh^2}{l} \quad \ldots \; 2$$

d. h. der an beiden Enden gestützte und in der Mitte belastete Balken trägt viermal so viel, als wenn er am einen Ende eingemauert und am freien belastet ist.

Ist die Last P gleichförmig über den Balken vertheilt, so ist er in der Mitte am meisten der Gefahr des Bruches ausgesetzt. Denkt man sich denselben in dieser Stelle eingemauert, so wird die Gefahr des Bruchs noch die gleiche sein. Nun ist aber das über die eine Hälfte verbreitete Gewicht $\frac{P}{2}$ im Schwerpunkt derselben vereinigt anzunehmen. Der Hebelsarm ist $\frac{l}{4}$, das Bruchmoment mbh^2, daher:

$$\frac{P}{2} \cdot \frac{l}{4} = mbh^2$$

$$P = \frac{8mbh^2}{l} \quad \ldots \; 3$$

d. h. der mit seinen beiden Enden frei aufliegende und gleichförmig belastete Balken trägt doppelt so viel, als wenn die Last in der Mitte vereinigt ist, und 8mal so viel, als wenn er am einen Ende eingemauert und am freien belastet ist.

Soll das Gewicht G des Balkens berücksichtigt werden, so sei g das Gewicht des Theils AC, g′ das von BC. Vom Gewichte g kommt nun $\frac{1}{2}$ g auf A und $\frac{1}{2}$ g auf C, von g′ kommt $\frac{1}{2}$ g′ auf B, und $\frac{1}{2}$ g′ auf C. An C wirkt also $\frac{1}{2}g + \frac{1}{2}g' = \frac{1}{2}(g + g') = \frac{1}{2}G$. Demnach vermehrt sich die Last in C um $\frac{1}{2}$ G, und man erhält somit nach Gl. 1 die folgende Gleichung:

$$P + \frac{1}{2}G = \frac{mbh^2 l}{a\,(l - a)}$$

$$P = \frac{mbh^2 l}{a\,(l - a)} - \frac{1}{2}G \ldots 4.$$

Aufg. Wie hoch läßt sich in einem Getraidemagazin die Frucht aufschütten, wenn der Getraideboden auf Balken von Eichenholz liegt, die 6 Meter Länge; 0,3 Mtr. Breite, und 0,35 Mtr. Höhe haben. Die Entfernung der Balken von Mitte zu Mitte beträgt 1 Meter, und 1 Kubikmeter Getraide 750 Kilogramm.

Aufl. Man hat hier Gl. 3 anzuwenden. Es ist $l = 6000$; $b = 300$; $h = 350$ Millimeter, und für die Dauer hat man für Eichenholz $\frac{m}{10} = 0,116$. Somit: $P = 8 . 0,116 . \frac{300 . 350^2}{6000} =$ 5684 Kilgr.

Ist x die Höhe des aufgeschütteten Getraides, so ist das auf einen Balken kommende Volumen = 1.6.x Kubikmeter und dessen Gewicht 750.1.6.x Kilgr., also

$$750.6.x = 5684$$

$$x = 1,26 \text{ Meter hoch.}$$

§. 160.

Ist der Balken, Fig. 142, mit beiden Enden eingemauert, so wird er in den Einmauerungsstellen A, B und im Angriffspunkt der Kraft P zugleich brechen. Sind nun p, p′, p″ die einzelnen Kräfte, welche die Brüche in den Punkten A, B, C bewirken, so hat man mit Bezug auf obige Herleitung:

$$p = \frac{mbh^2}{a}\,;\; p' = \frac{mbh^2}{(l-a)}\,;\; p'' = \frac{mbh^2 l}{a\,(l - a)}\,.$$

Da aber sämmtliche Brüche von P bewirkt werden sollen, so muß sein

$$P = p + p' + p'' = mbh^2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{l - a} + \frac{1}{a\,(l - a)}\right)$$

oder:

$$P = \frac{2mbh^2 l}{a\,(l - a)} \ldots 1.$$

Hängt die Last P in der Mitte D, so wird $a = \frac{l}{2}$, daher

$$P = \frac{8mbh^2}{l} \quad . \; . \; . \; 2.$$

Ein solcher Balken trägt also doppelt so viel, als wenn er mit beiden Enden frei aufliegt.

§. 161.

Wenn der Balken, Fig. 143, unter einem Winkel α gegen dem Horizont geneigt ist, so muß die in C vertical abwärts wirkende Kraft P zerlegt werden in zwei rechtwinkelige Seitenkräfte, wovon die eine P sin α nach der Längenrichtung des Balkens denselben mit seiner relativen Festigkeit in Anspruch nimmt, und die andere P cos α normal auf die Längenrichtung den Bruch zu bewirken sucht. Wir dürfen daher für diesen Fall nur P cos α, statt P in die Gl. 1 vom vorigen § setzen, wodurch man erhält:

$$P \cos \alpha = \frac{2mbh^2 l}{a\,(l - a)}$$

also

$$P = \frac{2mbh^2 l}{a\,(l - a) \cos \alpha} \quad . \; . \; . \; 1.$$

Wirkt die Kraft P in der Mitte D des Balkens, so wird:

$$P = \frac{8mbh^2}{l \cos \alpha} \quad . \; . \; . \; 2.$$

Hieraus folgt: Die Festigkeit eines geneigten Balkens ist gleich der Festigkeit eines horizontalen von gleichem Querschnitt wie der erste, dessen Länge aber nur der Horizontalprojection der Länge des ersten gleich ist.

§. 162.

Um die relative Festigkeit eines am einen Ende befestigten Cylinders zu bestimmen, sei r dessen Radius, l die Länge, P die am freien Ende wirkende Kraft, die den Bruch bewirkt. Der Widerstand der Bruchfläche ist nach §. 157 kJ, der Hebelsarm aber r, somit hat man die Gleichung:

$$P \, . \, l = kJ \, . \, r.$$

Nun ist $J = r^2\pi$, $\frac{k}{2} = m$ oder $k = 2m$, demnach wird

$$P \, . \, l = 2mr^3\pi$$

und

$$P = \frac{2mr^3\pi}{l} \quad . \; . \; . \; 1.$$

Für einen hohlen Cylinder, dessen äußerer Radius R, der innere r ist, muß die Festigkeit der Masse, welche der Höhlung entspricht, abgezogen werden. Der Hebelsarm ist R für die Bruchfläche. Man erhält dann:

$$P = \frac{2m\pi R^3}{l} - 2m\pi r^2 R$$

$$P = \frac{2m\pi R\ (R^2 - r^2)}{l} \ldots 2.$$

Soll die Masse eines vollen Cylinders der Masse des hohlen gleich sein, so sei r' der Radius des vollen, dann ist $r'^2 = (R^2 - r^2)$, also hat man für den hohlen Cylinder

$$P = \frac{2m\pi R\ .\ r'^2}{l} \ldots 3.$$

Es ist hiernach die Festigkeit des hohlen Cylinders bei gleicher Masse größer als die des vollen.

Um die Festigkeit P eines vollen Cylinders mit der Festigkeit P' des umschriebenen Parallelepipeds zu vergleichen, setze man $b = 2r$, $h = 2r$, also ist $P' = \frac{mbh^2}{l} = \frac{8mr^3}{l}$; somit verhält sich:

$$P : P' = \frac{2m\pi r^3}{l} : \frac{8mr^3}{l} = \pi : 4.$$

§. 163.

Aufgabe. Wie muß ein cylindrischer Baumstamm behauen werden, damit der daraus entstehende vierkantige Balken die größtmögliche relative Festigkeit habe?

Aufl. Es sei $AC = d$ die Dicke des Stammes, Fig. 144; ABCD der Querschnitt des vierkantigen Balkens, dessen Breite $AB = b$ und Höhe $BC = h$. Für jede Höhe und Breite ist nun

$$h^2 = d^2 - b^2$$
$$bh^2 = bd^2 - b^3.$$

Um den Werth von b zu finden, für welche bh^2 ein Maximum ist, lassen wir b um eine unendlich kleine Größe $\triangle$ wachsen und setzen die zugehörige Zunahme von bh^2 gleich 0.

Es ist dann

$$d^2 (b + \triangle) - (b + \triangle)^3 - (bd^2 - b^3) = 0$$

oder $d^2b + d^2\triangle - (b^3 + 3b^2\triangle + 3b\triangle^2 + \triangle^3) - bd^2 + b^3 = 0.$

Werden die höhern Potenzen von $\triangle$ vernachläßigt, so wird

$$d^2\ \triangle - 3b^2\ \triangle = 0$$
$$d^2 = 3b^2$$
$$b = d\sqrt{\frac{1}{3}}$$
$$h^2 = d^2 - b^2 = 3b^2 - b^2 = 2b^2$$
$$b^2 : h^2 = 1 : 2$$
$$b : h = \sqrt{1} : \sqrt{2} = 5 : 7.$$

Der Baumstamm muß demnach so behauen werden, daß sich die Breite des Balkens zur Höhe verhält wie 5 : 7.

Mit Beachtung dieses Verhältnisses hat man die Festigkeit

$$P = \frac{mb\ .\ 2b^2}{l} = \frac{2mb^3}{l}.$$

Den entsprechenden Balkenquerschnitt ABCD findet man, wenn

man den Durchmesser AC in drei gleiche Theile theilt und auf ihn in den Theilungspunkten E, F die Perpendikel ED, FB errichtet, wodurch die andern beiden Eckpunkte D, B bestimmt sind. Es ist dann $AB^2 = AF \,.\, AC = \frac{d}{3} \,.\, d = \frac{d^2}{3} = b^2$ und $BC^2 = CF \,.\, AC = \frac{2d \,.\, d}{3} = \frac{2}{3} d^2 = h^2$.

§. 164.

Körper von gleichem Widerstand. Solche Körper, welche in allen Querschnitten gleiche relative Festigkeit haben, heißen Körper von gleichem Widerstand.

Aufg. 1. Ein Körper AE, Fig. 145, sei mit dem einen Ende eingemauert und trage am freien Ende eine Last P. Die Querschnitte seien lauter Rechtecke von gleicher Breite. Man soll die Form bestimmen, welche man ihm geben muß, damit alle Querschnitte dem angehängten Gewichte gleichen Widerstand darbieten?

Aufl. Es sei die Länge BC = l, die Breite BD = CE = b, die Höhe des eingemauerten Querschnitts AB = h. In der Entfernung CG = x sei die Höhe des Querschnitts GH = y. Nun ist für den Querschnitt AD die Festigkeit $= \frac{mbh^2}{l}$ und für den Querschnitt HJ ist sie $= \frac{mby^2}{x}$. Da nun beide Festigkeiten gleich sein sollen, so ist:

$$\frac{mby^2}{x} = \frac{mbh^2}{l}$$

und daraus $$y^2 = \frac{h^2}{l} \,.\, x.$$

Dieß ist aber die Gleichung einer gemeinen Parabel. Folglich muß die Begrenzungslinie AHC eine Parabel sein, welche $\frac{h^2}{l}$ zum Parameter und C zum Scheitel hat.

Aufg. 2. Ueber einen am einen Ende eingemauerten und am andern Ende freien Körper, Fig. 146, ist eine Last P gleichförmig vertheilt. Man soll die Form desselben bestimmen, wenn alle Querschnitte Rechtecke von gleicher Breite sind und alle gleiche Widerstandsfähigkeit besitzen sollen?

Aufl. Es sei BC = l die Länge des Körpers, AB = h die Höhe des eingemauerten Querschnitts, b die Breite. In einer beliebigen Entfernung CD = x sei DE = y die Höhe des zugehörigen Querschnitts. Die Belastung auf die Längeneinheit sei p, so ist die Belastung auf die ganze Länge = pl. Der Hebelsarm dieser Belastung ist $\frac{l}{2}$, daher hat man für die Festigkeit des eingemauerten Querschnitts die Gleichung:

$$pl \cdot \frac{l}{2} = mbh^2$$

$$\frac{p}{2} = \frac{mbh^2}{l^2} \quad \ldots 1.$$

Die Belastung über CD ist px und x der entsprechende Hebelsarm, daher für den Querschnitt DE die Gleichung:

$$px \cdot \frac{x}{2} = mby^2$$

$$\frac{p}{2} = \frac{mby^2}{x^2} \quad \ldots 2.$$

Aus 1 und 2 folgt:

$$\frac{mby^2}{x^2} = \frac{mbh^2}{l^2}$$

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{h^2}{l^2}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{h}{l}$$

$$y : x = h : l$$

$$y = \frac{h}{l} \cdot x.$$

Hieraus folgt, daß die Begrenzungslinie AC eine gerade Linie sein muß. Der Längenschnitt des Körpers ist also ein rechtwinkeliges Dreieck.

Aufg. 3. Ein Körper AB, Fig. 147, sei in horizontaler Lage in beiden Enden gestützt, die Querschnitte seien lauter Rechtecke von gleicher Breite. Ein Gewicht P bewege sich über denselben hin. Welche Form muß derselbe erhalten, wenn alle Querschnitte diesem Gewichte gleichen Widerstand darbieten sollen?

Aufl. Es sei AB = l die Länge des Körpers, b die Breite, $AC = \frac{l}{2} = a$, CD = h die Höhe des Querschnitts in der Mitte. Für einen beliebigen andern Querschnitt EF sei BE = x und dessen Höhe EF = y. Wenn sich das Gewicht in E befindet, so ist der Druck auf den Stützpunkt B gleich $\frac{P\,(l - x)}{l}$, daher das Moment in Bezug auf diesen Querschnitt gleich $\frac{P\,(l - x)\,x}{l}$. Das Festigkeitsmoment dieses Querschnitts ist aber mby^2, daher

$$mby^2 = \frac{P\,(l - x)\,x}{l}$$

$$y^2 = \frac{P}{mbl} \cdot (lx - x^2).$$

Dieß ist die Gleichung einer Ellipse. Es muß also die Begrenzungskurve AFB eine Ellipse sein.

Aufg. 4. Ein Körper AB, Fig. 148, sei in beiden Enden gestützt und trage in C eine Last P. Die Querschnitte seien lauter Rechtecke von gleicher Breite. Man soll die Form des Körpers so bestimmen, daß alle Querschnitte gleichen Widerstand besitzen?

Aufl. Es sei AB = l, AC = a, die Höhe des belasteten Querschnitts CD = h. Für einen andern Querschnitt EF sei AE = x und EF = y. Es ist nun die Festigkeit in Bezug auf CD $= \frac{mbh^2}{a}$ und auf EF $= \frac{mby^2}{x}$. Durch Gleichsetzung beider Werthe ergibt sich

$$\frac{mby^2}{x} = \frac{mbh^2}{a}$$

$$y^2 = \frac{h^2}{a} \cdot x.$$

Da dieß die Gleichung einer Parabel ist, so müssen die Kurven AFD und BC Parabeln sein.

Rückwirkende Festigkeit.

§. 165.

Wird bei einem Körper, Fig. 149, die rückwirkende Festigkeit in Anspruch genommen, so sind innerhalb der Elasticitätsgrenze die Zusammendrückungen den aufgelegten Gewichten proportional. Wird aber diese Grenze überschritten, dann erfolgt das Zerquetschen oder Zertrümmern des Körpers. Versuche haben gezeigt, daß in diesem Falle bei Körpern von ähnlicher Form und demselben Material die rückwirkende Festigkeit der Querschnittsfläche proportional sei, auf welche die Belastung senkrecht wirkt, und daß sie um so größer sei, je mehr sich die Fläche der Kreisform und die Dicke der Höhe nähert, wobei vorausgesetzt wird, daß die Dimension in der Richtung des Drucks klein sei gegen die darauf senkrechten Dimensionen.

Bezeichnet J den Inhalt des Querschnitts des Körpers, m′ den Coefficienten für rückwirkende Festigkeit, P die Last, wobei der Körper zerdrückt wird, so ist $P = m'J$.

Tabelle über den Coefficienten der rückwirkenden Festigkeit für Quadratmillimeter und Kilogramm.

Name der Körper.	Werth von m′ in Kilg.	Name der Körper.	Werth von m′ in Kilg.
Basalt	16—20	Ziegelstein	0,4—1,7
Granit	4—7	Eichenholz	3,8—4,6
Bimsstein	0,3452	Tannenholz	4,6—5,4
Mörtel aus Kalk und Sand	0,3068	Ulmenholz	0,9
Gneis	3—4	Gußeisen	90—100
Kalkstein	2—5	Kanonenmetall	252
Marmor	5—8	Kupfer, gegossen	82
Porphyr	20	Backsteine	0,4—0,6
Sandstein, weich	0,8	„ hart	1,2—1,5
„ hart	8—9		

Soll der Körper die Belastung für die Dauer tragen, so darf bei Steinen und Hölzern nur $^1/_{10}$ und bei Metallen $^1/_4$ — $^1/_5$ der obigen Werthe genommen werden.

§. 166.

Bei Körpern, wie bei Pfeilern, Säulen, deren Höhe beträchtlich größer als die Dicke ist, tritt bei fortgesetzter Belastung vor dem Zerknicken eine Biegung ein. Die bis daher für diesen Fall auf analytischem Wege gefundenen Formeln geben für solche Dimensionen, wie sie meistens in der Ausübung vorkommen, keine richtigen Resultate. Zuverlässiger sind die in dieser Beziehung erhaltenen Erfahrungsresultate. Nach Versuchen kann man die Kraft, welche eine Säule zusammendrückt, deren Höhe der Länge gleich ist oder das Doppelte der Dicke beträgt, durch folgende Formeln finden, wenn J den Querschnitt in Quadratmillimeter und P das aufgelegte Gewicht in Kilogrammen bedeutet, nämlich:

für Hölzer $P = 3J$
„ Schmiedeisen $P = 40J$
„ Gußeisen $P = 100J$.

Es haben Versuche ferner gezeigt:

1) daß man für Holz diesen Zahlencoefficient auf $^5/_6$ vermindern muß, wenn die Länge der 12fachen Dicke gleichkommt, und um die Hälfte, wenn die Länge 24mal so groß ist als die Dicke.

2) Bei Schmiedeisen hat man $^5/_8$ bei 12facher Länge und die Hälfte bei 24facher Länge zu nehmen.

3) Bei Gußeisen ist $^2/_3$ des Coefficienten zu nehmen, wenn die Länge das Vierfache der Dicke, die Hälfte, wenn die Länge die achtfache Dicke beträgt und $^1/_{15}$ bei 36facher Länge.

Torsions-Festigkeit.

§. 167.

Wird ein prismatischer oder cylindrischer Körper Fig. 150 mit dem einen Ende eingemauert und wirkt am andern freien Ende in der auf der Axe normalen Ebene eine Kraft, die den Körper um seine Axe zu drehen sucht, so wird eine Verdrehung stattfinden und bei gehöriger Kraftäußerung ein Bruch erfolgen.

Nehmen wir an, die Welle bestehe aus lauter zur Axe parallelen Fasern wie AB, tangential am Umfang wirke in der zur Axe normalen Ebene eine Kraft P, wodurch die Faser AB in die Lage AC gebracht, also um BC verdreht werde. Setzt man die Länge der Faser $AB = l$ und die Verdrehung $BC = s$, so erhält man die Länge der ausgedehnten Faser $AC = \sqrt{l^2 + s^2}$, oder nahezu $= l + \frac{s^2}{2l}$.
Somit beträgt die Ausdehnung $\lambda = \frac{s^2}{2l}$. Bezeichnet ferner i den Querschnitt der Faser, so ist die in der Richtung derselben zum Aus-

dehnen erforderliche Kraft $Q = \frac{is^2}{2l^2} . E$. Denkt man sich nun die Kraft P in zwei Seitenkräfte zerlegt, wovon eine Q in der Richtung der Fasern und die andere R normal darauf wirkt, so hat man aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CPQ und DAB die Proportion: $Q : P = s : l$. Hieraus folgt

$$P = \frac{Q.l}{s} = \frac{is^2}{2l^2} . E . \frac{l}{s} = \frac{i.s}{2l} . E.$$

Es wächst also die Torsionskraft einer Faser wie der Querschnitt und wie die Verdrehung und umgekehrt wie ihre Länge.

Soll die Torsionskraft für die ganze Welle gefunden werden, so zerlege dieselbe in concentrische Ringe, indem man ihren Halbmesser r in n gleiche unendlich viele Theile theilt. Die Dicke eines solchen Ringes ist sonach $\frac{r}{n}$. Nehmen wir einen Ring vom Halbmesser $\frac{m.r}{n}$, so ist dessen Querschnitt $= \frac{2\pi.mr}{n} . \frac{r}{n} = \frac{2\pi mr^2}{n^2}$, also die Torsionskraft $= \frac{\pi mr^2 s}{n^2 l} . E$ und ihr statisches Moment $= \frac{\pi mr^2.s}{n^2 l} . E . \frac{mr}{n} = \frac{\pi m^2 r^3 s}{n^3 l} . E$. Wird der Torsionsbogen für den Radius = 1 mit α bezeichnet, so ist $s = \frac{mr}{n} . \alpha$, daher das statische Moment der Torsionskraft dieses Ringes $= \frac{\pi m^3 . r^4 \alpha}{n^4 . l} . E$. Setzt man in diesen Ausdruck für m der Reihe nach 1, 2, 3 . . . n, so erhält man die statischen Momente der Torsionskräfte für alle einzelnen Ringelemente. Addirt man dieselben, so erhält man die Summe sämmtlicher Momente

$$(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots n^3) \frac{\pi r^4 . \alpha}{n^4 l} . E = \frac{n^4}{4} . \frac{\pi r^4 . \alpha}{n^4 . l} . E = \frac{\pi r^4 \alpha}{4l} . E.$$

Dieß ist sofort das Moment der Kraft zur Verdrehung um den Winkel α. Wirkt nun P an dem Hebelsarm p, so hat man die Gleichung:

$$P . p = \frac{\pi r^4 \alpha}{4l} . E \ldots 1$$

$$\alpha = \frac{4l.P.p}{\pi r^4 E} \ldots 2.$$

Für einen hohlen Cylinder erhält man, wenn ϱ der innere Radius ist

$$Pp = \frac{\pi\alpha}{4l} . E\,(r^4 - \varrho^4) \ldots 3.$$

Es sei R der Radius eines massiven Cylinders, der mit dem hohlen gleiche Masse hat, so ist $r^2 - \varrho^2 = R^2$ und $r^4 - \varrho^4 = (2r^2 - R^2) . R^2$, daher:

$$Pp = \frac{\pi\alpha}{4l} . E . (2r^2 - R^2)\, R^2 \ldots 4.$$

Wird r = R, so ergibt sich das Torsionsmoment

$$Pp = \frac{3\pi\alpha}{4l} \,.\, R^4 \,.\, E \,\ldots\, 5.$$

Bei der Umdrehung der Welle werden die Fasern nicht allein ausgedehnt, sondern auch zusammengedrückt. Man hat daher für den Coefficienten E nicht den gewöhnlichen Werth, sondern folgende zu nehmen. Wenn α in Seragesimalgraden genommen wird und die Längenmaße in Millimeter, so hat man folgende Werthe:

Name der Körper.	E für □Millimeter in Kilgr.	Name der Körper.	E für □Millimeter in Kilgr.
Ahornholz	3,38—5,52	Kiefer	2
Buche	3,12	Schmiedeisen . .	208—286
Fichte	1,54—2,20	Gußeisen . . .	138—140
Tanne	1,66—3,02	Stahl	238—292

Nach Versuchen von Gerstner soll, wenn für die Dauer gerechnet wird, der Drehwinkel für alle Wellen nicht mehr als 0,117 Grad betragen; nach andern Versuchen soll α den Werth von 0,3 Grad nicht überschreiten.

§. 168.

Will man die Kraft bestimmen, welche zum Abdrehen oder Abbrechen erforderlich ist, so darf man nur für die Verdrehung $r\alpha$ am Umfang den Werth einführen, bei welchem ein Zerreißen der äußern Faser erfolgt. Ist w der Festigkeitscoefficient, so ist $\frac{w}{E} = \frac{R}{l}$ $= \frac{s^2}{2l^2} = \frac{r^2\alpha^2}{2l^2}$, daher $\frac{r\alpha}{l} = \sqrt{\frac{2w}{E}}$. Setzt man diesen Werth in obige Gleichung, so ist das statische Moment zum Abdrehen der Welle:

$$Pp = \frac{\pi r^3}{4}\sqrt{\frac{2w}{E}} \,.\, E = \frac{\pi r^3}{4}\sqrt{2wE} = \frac{\pi r^3}{2}\sqrt{\frac{wE}{2}}.$$

Setzt man $\sqrt{\frac{wE}{2}} = t$, so folgt:

$$Pp = \frac{t \,.\, \pi r^3}{2}.$$

Werthe des Coefficienten t für den Bruch durch Verdrehung für Millimeter und Kilogramm.

Name der Körper.	Werth von t	Name der Körper.	Werth von t
Gußeisen	20—45	Kupfer, gegossen . .	19,75
Schmiedeisen	44,9	Zinn	6,58
Stahl	79,85	Blei	4,58
Messing	21,46		

Zweiter Abschnitt.

Dynamik fester Körper.

§. 169.

Einleitung. In der Statik haben wir die Gesetze kennen lernen, welche stattfinden müssen, wenn die auf einen Körper wirkenden Kräfte ein Gleichgewicht bedingen sollen. Die Dynamik hat es dagegen mit der Auffindung der Gesetze zu thun, welche bei der Bewegung der Körper statt haben. Da aber die Bewegung eines Körpers nur dann genau bestimmt ist, wenn die Bewegung jedes seiner Punkte angegeben werden kann, so betrachtet man zuerst die Bewegung eines Punktes.

Die Bewegung eines Punktes oder Körpers kann nur stetig im Raume erfolgen, und der Raum, den er dabei zurücklegt, ist entweder eine stetige gerade oder krumme Linie, welche die Bahn des Punktes genannt wird.

Die Bewegung eines Punktes ist entweder geradlinig oder krummlinig, je nachdem seine Bahn eine gerade oder krumme Linie ist. Bei der geradlinigen Bewegung gibt die Bahn selbst die Richtung der Bewegung an, bei der krummlinigen dagegen ist sie stets eine andere und wird durch die geometrische Tangente bestimmt, welche an dem Punkte der Bahn gezogen werden kann, wo der bewegte Punkt sich gerade befindet.

Ist der Punkt isolirt, so ist seine Bahn nur eine Folge der während seiner Bewegung auf ihn wirkenden Kräfte, und seine Bewegung ist eine freie. Steht er aber in einer bestimmten Verbindung mit andern Punkten oder Körpern, dann wird er eine Bahn beschreiben, die von den auf ihn wirkenden Kräften unabhängig ist und seine Bewegung ist eine nicht freie, gezwungene.

Da ein bewegter Punkt die auf einander folgenden Orte seiner Bahn nur nach und nach erreichen kann, so muß dieß nur in einer kleinern oder größern Zeitintervalle geschehen, und sonach ist bei der Vorstellung einer jeden Bewegung auch nothwendig die der Zeit mit verbunden. Der Punkt braucht also immer eine gewisse Zeit, um einen gewissen Weg zurückzulegen. Vergleichen wir den zurückgelegten Weg mit der dabei verflossenen Zeit, so erhalten wir eine Vorstellung von der Schnelligkeit, Raschheit oder Geschwindigkeit der Bewegung.

In Beziehung auf die Zeit ist die Bewegung entweder gleichförmig oder ungleichförmig, veränderlich. Sie ist gleichförmig, wenn der bewegte Punkt oder Körper in gleichen unendlich kleinen Zeittheilchen gleiche Theile seiner Bahn zurücklegt. Sie ist ungleichförmig oder veränderlich, wenn dieß nicht der Fall ist.

Die ungleichförmige Bewegung ist entweder eine beschleunigte, wenn die in den folgenden gleichen Zeittheilchen durchlaufenen Wege stets größer werden, oder eine verzögerte, wenn diese Wege immer kleiner werden. Sind die Zu- oder Abnahmen der in den folgenden gleichen Zeittheilchen zurückgelegten Wege gleich, so ist die Bewegung eine gleichförmig beschleunigte oder verzögerte, im andern Falle eine ungleichförmig beschleunigte oder verzögerte.

Periodisch nennt man eine Bewegung, wenn nur innerhalb gewisser gleichen Zeitabschnitte gleiche Wege beschrieben werden. Solche Bewegungen werden betrachtet in der Astronomie, der Maschinenlehre, Physik.

Die Bewegung eines Körpers ist eine fortschreitende, wenn alle Punkte gleiche parallele Linien zurücklegen, sie ist eine drehende oder rotatorische, wenn alle Punkte sich um einen festen Punkt, den Drehpunkt, oder um eine feste Are, die Drehare, bewegen. Manche Körper haben zugleich beide Bewegungen.

Die Bewegung eines Punktes ist vollständig bestimmt, wenn man seine Bahn kennt und den Weg, welchen er in einer gewissen Zeit zurücklegt. Um aber den Weg zu bestimmen, müssen wir ein gewisses Maß dazu besitzen. Als ein solches Maß nehmen wir aber bei der gleichförmigen Bewegung den Weg an, den der Punkt in der Zeiteinheit zurücklegt, und nennen diesen seine Geschwindigkeit. Die Längeneinheit dient hierzu als Maßeinheit des Weges, z. B. der Fuß, der Meter. Bei gewissen Bewegungen wird auch wohl die Wegstunde, die geographische Meile, der Erdhalbmesser als Einheit angenommen.

Als Zeiteinheit betrachtet man gewöhnlich die Secunde, doch wird auch in gewissen Fällen die Minute oder die Stunde dazu gewählt.

Bei der ungleichförmigen Bewegung spricht man auch von Geschwindigkeit, obwohl diese sich jeden Augenblick ändert. Man betrachtet dabei den Punkt in irgend einem Augenblicke seiner Bewegung und nennt hierbei seine Geschwindigkeit den Weg, welchen er in der folgenden Zeiteinheit gleichförmig zurücklegen würde, wenn von diesem Augenblicke an die seine Bewegung verändernden Ursachen plötzlich beseitigt würden.

In Beziehung auf die bewegenden Kräfte unterscheidet man öfters Momentankräfte und continuirlich wirkende Kräfte. Unter einer Momentankraft versteht man eine solche, die nur einmal und zwar nur eine unangebbar kurze Zeit auf einen Körper wirkt. Eine solche ist die Ursache einer gleichförmigen Bewegung. Continuirliche Kräfte sind solche, die längere Zeit hindurch ununterbrochen ihre Wirkung äußern. Diese bewirken immer beschleunigte oder verzögerte Bewegung.

Betrachtet man die Bewegung nur in Beziehung auf Raum und Zeit und abstrahirt von den Wirkungen der Kräfte, so heißt man diese Bewegungslehre Phoronomie, Phorometrie oder rein mathematische Bewegungslehre. Untersucht man aber die Bewegung eines physischen Körpers mit Rücksicht auf die dabei thätigen Kräfte, so heißt man diese Bewegungslehre die physische Bewegungslehre, Dynamik.

Erstes Kapitel.

Von der gleichförmigen Bewegung.

§. 170.

Grundgesetze. Bei der gleichförmigen Bewegung versteht man unter Geschwindigkeit den Weg, welchen der Punkt in einer Secunde zurücklegt. Ist daher v die Geschwindigkeit, s der Weg, den der Punkt in t Secunden durchläuft, so hat man

$$s = vt \quad . \; . \; . \; 1$$

d. h. man findet den in einer gewissen Zeit durchlaufenen Weg, wenn man die Zeit mit der Geschwindigkeit multiplicirt.

Ferner ergibt sich: $$v = \frac{s}{t} \quad . \; . \; . \; 2$$

d. h. man findet die Geschwindigkeit, wenn man den Weg durch die Zeit dividirt.

Sodann: $$t = \frac{s}{v} \quad . \; . \; . \; 3$$

d. h. man findet die Zeit, wenn man den während dieser Zeit durchlaufenen Weg durch die Geschwindigkeit dividirt.

Für eine andere Zeit t′ sei s′ der zurückgelegte Weg, dann ist $s' = vt'$. Also verhält sich

$$s : s' = vt : vt'$$
$$s : s' = t : t' \quad . \; . \; . \; 4$$

d. h. die durchlaufenen Wege verhalten sich wie die Zeiten.

Aufg. 1. Wenn ein Bahnzug sich mit 40 Fuß Geschwindigkeit bewegt, welchen Weg legt er in einer Zeitstunde zurück?

Aufl. Hier ist $v = 40$; $t = 3600$ Secunden, daher nach Gl. 1,

$$s = 40 . 3600 = 144000 \text{ Fuß}.$$

Da eine badische Wegstunde 14814,8 Fuß hat, so gibt dieß $\frac{144000}{14814,8} = 9,72$ Wegstunden.

Aufg. 2. Wenn ein Körper in 10 Minuten einen Weg von 1800 Fuß zurücklegt, mit welcher Geschwindigkeit bewegt er sich?

Aufl. Hier ist $s = 1800$; $t = 10.60 = 600$ Secunden, daher nach Gl. 2

$$v = \frac{1800}{600} = 3 \text{ Fuß}.$$

Aufg. 3. Die Geschwindigkeit eines Pferdes sei 4 Fuß, in welcher Zeit wird es zwei badische Wegstunden zurücklegen?

Aufl. Es ist $s = 2 . 14814{,}8 = 29629{,}6$; $v = 4$, demnach

$$t = \frac{29629{,}6}{4} = 7407{,}4 \text{ Secunden}$$

oder 2 Stunden 3 Minuten 27,4 Secunden.

Der gleichförmig durchlaufene Weg ist ein Product aus Geschwindigkeit und Zeit. Da nun der Inhalt eines Rechteckes gleich ist dem Producte aus Grundlinie und Höhe, so läßt sich auch der Weg durch den Inhalt eines Rechteckes ABCD, Fig. 151, ausdrücken, dessen eine Seite $AB = t$ die Zeit und dessen andere $AD = v$ die Geschwindigkeit darstellt. Denn es ist alsdann $s = v . t = AD . AB$ = dem Inhalt des Rechtecks.

§. 171.

Drehende Bewegung eines Körpers. Bewegt sich ein Körper um eine unveränderliche Axe, von welcher alle Punkte desselben ihre beziehungsweisen Abstände stets beibehalten, so beschreibt jeder Punkt bei einer Umdrehung einen Kreis, dessen Radius gleich ist dem Abstande des Punktes von der Drehaxe und dessen Ebene rechtwinkelig auf derselben steht. Da nun die Punkte verschiedene Entfernungen von der Drehaxe haben, sie also in gleicher Zeit verschieden große Kreise bei einer Umdrehung beschreiben, so ist klar, daß diese Punkte sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegen müssen. Denkt man sich nun einen Punkt, welcher in der Entfernung gleich der Längeneinheit sich befindet, so heißt man den Weg oder den Kreisbogen, welchen dieser Punkt in der Zeiteinheit zurücklegt, die Winkelgeschwindigkeit.

Kennt man nun die Winkelgeschwindigkeit, so läßt sich die Geschwindigkeit eines jeden Punktes, dessen Entfernung von der Drehaxe bekannt ist, bestimmen. Ist u die Winkelgeschwindigkeit, v die Geschwindigkeit eines Punktes in der Entfernung r, so hat man:

$$v : u = r : 1$$

$$v = ru \quad . \; . \; . \; 1$$

d. h. man findet die wahre Geschwindigkeit eines Punktes, wenn man seine Entfernung von der Drehaxe mit der Winkelgeschwindigkeit multiplicirt.

Auch folgt: $$u = \frac{v}{r} \quad . \; . \; . \; 2$$

und $$r = \frac{v}{u} \quad . \; . \; . \; 3$$

welche Gleichungen sich auch leicht in Worten aussprechen lassen.

Die Winkelgeschwindigkeit wird oft durch die Anzahl Umdrehungen bestimmt, welche der Körper in einer bestimmten Zeit t macht. Dreht sich nun der Körper n mal in dieser Zeit um seine Axe, so ist bei einmaliger Umdrehung der Weg eines Punktes in der Entfernung Eins gleich 2π und bei n maliger Umdrehung gleich $2\pi n$; da nun

die Winkelgeschwindigkeit u ist, so ist der Weg dieses Punktes in der Zeit t auch ut, daher ist

$$\left.\begin{aligned} ut &= 2\pi n \\ u &= \frac{2\pi n}{t} \\ n &= \frac{ut}{2\pi} \\ t &= \frac{2\pi n}{u} \end{aligned}\right\} \ldots 4.$$

Es sei v die wahre Geschwindigkeit eines Punktes in der Entfernung r, so ist $v = ru$, daher

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{2r\pi n}{t} \\ n &= \frac{vt}{2r\pi} \\ t &= \frac{2r\pi n}{v} \\ r &= \frac{vt}{2\pi n} \end{aligned}\right\} \ldots 5.$$

Bei technischen Fragen wird häufig die Anzahl Umdrehungen angegeben, welche in der Minute gemacht werden. Für diesen Fall ist $t = 60$ Secunden und man hat:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \\ n &= \frac{60 \,.\, u}{2\pi} = \frac{30u}{\pi} \end{aligned}\right\} \ldots 6.$$

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{2r\pi n}{60} = \frac{r\pi n}{30} \\ n &= \frac{60 \,.\, v}{2r\pi} = \frac{30 \,.\, v}{r\pi} \end{aligned}\right\} \ldots 7.$$

Aufg. 1. Welches ist die Winkelgeschwindigkeit der Erde bei ihrer Axendrehung?

Aufl. Nach Formel 4 ist $n = 1$; $t = 24 \,.\, 60 \,.\, 60 = 86400$ Secunden; $\pi = 3{,}1415926$, daher

$$u = \frac{2 \,.\, 3{,}1415926}{86400} = 0{,}000072722 \text{ Fuß.}$$

Aufg. 2. Welches ist die Geschwindigkeit eines Punktes der Erde im Aequator?

Aufl. Es ist der Radius des Aequators $r = 860$ geographische Meilen; eine Meile gleich 2360 preuß. Fuß; $t = 86400$, $\pi = 3{,}14$, daher nach 5

$$v = \frac{2 \,.\, 860 \,.\, 3{,}14 \,.\, 23600}{86400} = 1475 \text{ preuß. Fuß.}$$

Aufg. 3. Ein Wasserrad von 16 Fuß Durchmesser hat eine Umfangsgeschwindigkeit von 5 Fuß; wie viele Umdrehungen macht dasselbe in der Minute und welches ist seine Winkelgeschwindigkeit?

Aufl. Hier ist $r = 8$; $v = 5$; $\pi = 3{,}1416$; daher nach Gl. 7

$$n = \frac{30 \,.\, 5}{8 \,.\, 3{,}1416} = 5{,}96$$

und nach Gl. 2 ist $\quad u = \frac{v}{r} = \frac{5}{8} = 0{,}625$ Fuß.

§. 172.

Zusammengesetzte Bewegung. Wenn ein Punkt gleichzeitig mehrere Bewegungen besitzt, so wird durch das Zusammenwirken dieser Einzelbewegungen seine wahre oder wirkliche Bewegung erzeugt. Die Bewegung eines solchen Punktes ist dann eine zusammengesetzte und wird demnach durch das gleichzeitige Vorhandensein mehrerer einfachen Bewegungen erzeugt. Das Bestimmen der resultirenden Bewegung aus den Einzelbewegungen heißt man die Zusammensetzung der Bewegungen. Bestimmt man aber ein System von Einzelbewegungen, durch deren gleichzeitiges Zusammenwirken eine wahre vorhandene Bewegung erzeugt wurde oder entstanden gedacht werden kann, so nennt man dieß die Zerlegung der Bewegung.

Beispiele von zusammengesetzten Bewegungen geben uns viele Maschinen, wie die Hobelmaschine mit Support; ein über einen Fluß segelnder Kahn; ein geworfener Körper; jeder Punkt der Erdoberfläche.

Die einfache Bewegung ist stets geradlinig, die zusammengesetzte kann gerad- und krummlinig sein.

§. 173.

Zusammensetzung der Bewegungen in derselben geraden Linie. Wird einem Körper nach derselben Richtung die Geschwindigkeit v und gleichzeitig die Geschwindigkeit v' mitgetheilt, so wird er in einer Zeit t vermöge der erstern den Weg vt und vermöge der zweiten den Weg v't zurücklegen. Der wirklich während dieser Zeit zurückgelegte Weg ist daher

$$s = vt + v't = (v + v')\ t.$$

Hat die zweite Bewegung eine entgegengesetzte Richtung, so wird v' negativ. Der wahre zurückgelegte Weg ist daher in diesem Falle: $s = vt - v't$

$$s = (v - v')\ t.$$

Die mittlere Geschwindigkeit, d. h. diejenige, mit welcher sich der Körper wirklich bewegt, ist also im ersten Falle gleich der Summe, im andern gleich der Differenz beider Geschwindigkeiten.

Besitzt der Körper mehrere theils positive, theils negative Geschwindigkeiten, so ist seine wirkliche oder mittlere Geschwindigkeit gleich der algebraischen Summe sämmtlicher Geschwindigkeiten.

Geht z. B. ein Mann mit zwei Fuß Geschwindigkeit längs eines Schiffes, das sich mit 10 Fuß Geschwindigkeit bewegt, so ist seine wirkliche Geschwindigkeit entweder 10 + 2 = 12 Fuß oder 10 — 2 = 8 Fuß, je nachdem er in der Bewegungsrichtung des Schiffes oder nach entgegengesetzter Richtung sich bewegt.

§. 174.

Parallelogramm der Geschwindigkeiten. Werden einem Punkt zwei Bewegungen nach verschiedenen Richtungen ertheilt, so kann man seine wirkliche Bewegung durch folgende Betrachtung

finden. Wir wollen annehmen, eine gerade Linie AB, Fig. 152, bewege sich gleichförmig und parallel zu sich selbst im Raume fort und komme nach einer gewissen Zeit t in die Lage CD, so werden die Punkte A und B gleichförmig die Seiten AC und BD des Parallelogramms ABDC durchlaufen haben. Denken wir uns ferner, ein Punkt bewege sich gleichzeitig und ebenfalls gleichförmig von A aus auf der geraden Linie AB, so zwar, daß er in B (beziehungsweise in D) angekommen sei, sobald AB die Lage CD eingenommen habe. Nun ist offenbar, daß dieser Punkt zwei Geschwindigkeiten besitzt, die eine parallel zu AC, welche sämmtlichen Punkten der geraden Linie AB gemeinschaftlich ist; die andere parallel zu AB oder diejenige, mit welcher er sich auf der geraden Linie selbst bewegt. Es fragt sich aber nun, nach welcher Richtung der Punkt sich wirklich bewege und wie seine wahre Bewegung beschaffen sei. Um dieß zu ermitteln, nehmen wir an, die gerade Linie AB sei nach irgend einer Zeit t′ in die Lage ab und der Punkt auf ihr nach c gekommen, und die Verbindungslinie Ac sei gezogen. Da nun die Bewegung von AB parallel mit sich selbst und gleichförmig ist, so hat man:

$$Aa : AC = t' : t.$$

Es ist aber auch die Bewegung des Punktes auf der Linie gleichförmig, daher folgt auch:

$$ac : CD = t' : t.$$

Aus beiden Proportionen ergibt sich nun:

$$Aa : AC = ac : CD.$$

Ferner ist $\measuredangle$ Aac = $\measuredangle$ ACD, folglich $\triangle$ Aac $\sim$ $\triangle$ ACD, woraus hervorgeht, daß auch $\measuredangle$ aAc = $\measuredangle$ CAD, und daß somit die drei Punkte A, c, D in einer geraden Linie, also in der Diagonale AD des Parallelogramms ABDC liegen. Der bewegte Punkt befindet sich also in jeder beliebigen Zeit t′ in der Diagonale AD und durchläuft diese in derselben Zeit, in welcher die Linie nach CD kommt und er die Länge AB durchlaufen würde.

Aus der Aehnlichkeit der genannten Dreiecke folgt auch:

$$Ac : AD = Aa : AC.$$

Ferner ist: $Aa : AC = t' : t.$

Aus beiden Proportionen folgt:

$$Ac : AD = t' : t.$$

Hieraus ergibt sich, daß die von dem Punkt auf der Diagonale durchlaufenen Räume sich verhalten, wie die dazu verwendeten Zeiten. Folglich ist seine Bewegung in der Diagonale gleichförmig.

Da die betrachteten Bewegungen gleichförmig sind, so lassen sich die Geschwindigkeiten des Punktes in den Richtungen AB, AC, AD beziehungsweise ausdrücken durch:

$$\frac{AB}{t}, \frac{AC}{t}, \frac{AD}{t}.$$

Es sind folglich die Geschwindigkeiten den Linien AB, AC, AD

proportional. Diese drei Linien können also die drei Geschwindigkeiten der Größe und Richtung nach repräsentiren. Ist die Zeit t eine Secunde, so stellen sie die Geschwindigkeiten selbst dar. Man nennt dann AB und AC die Seitengeschwindigkeiten und AD die resultirende oder mittlere Geschwindigkeit.

Aus dem Vorhergehenden folgt nun der Satz:

Wenn ein Punkt A gleichzeitig zwei Geschwindigkeiten besitzt, deren Richtungen einen Winkel mit einander bilden und welche der Größe und Richtung nach durch zwei unter diesem Winkel sich schneidende Seiten eines Parallelogramms gegeben sind, so stellt die Diagonale desselben, welche von diesem Durchschnittspunkt aus gezogen werden kann, die mittlere Geschwindigkeit der Richtung und Größe nach dar.

Dieser sehr wichtige Satz ist bekannt unter dem Namen Parallelogramm der Geschwindigkeiten.

Soll eine vorhandene, durch eine Linie AD gegebene Geschwindigkeit in zwei Seitengeschwindigkeiten nach gegebenen Richtungen zerlegt werden, so darf man nur das Parallelogramm der Geschwindigkeiten ABCD construiren, wodurch die Seitengeschwindigkeiten AB und AC bestimmt werden.

§. 175.

Durch trigonometrische Rechnungen lassen sich die mittlere Geschwindigkeit, die Seitengeschwindigkeiten und ihre Richtungswinkel auf dieselbe Weise bestimmen, wie dieß bei dem Parallelogramm der Kräfte geschehen ist. In Bezug auf die Ableitungen dieser Gleichungen verweisen wir daher auf die Paragraphen über das Parallelogramm der Kräfte.

Es seien die Seitengeschwindigkeiten AB $= v$, AC $= v'$, die Mittlere $= V$, der Winkel BAC $= \delta$, $\sphericalangle$ DAB $= \alpha$, $\sphericalangle$ CAD $= \beta$, so hat man für die Zusammensetzung:

$$V^2 = v^2 + v'^2 + 2v.v'.\cos\delta$$

und für die Zerlegung:

$$v = \frac{V \sin\beta}{\sin\delta},\ v' = \frac{V \sin\alpha}{\sin\delta}.$$

Die Gleichungen für die Fälle, wo die Geschwindigkeiten rechte Winkel bilden oder einander gleich sind, lassen sich leicht auf dieselbe Weise ableiten, wie beim Parallelogramm der Kräfte.

Aufg. Ein Körper besitzt zwei Geschwindigkeiten, $v = 12$ Fuß und $v' = 7$ Fuß, welche einen Winkel mit einander von 56^0 einschließen. Welches ist seine absolute oder mittlere Geschwindigkeit?

Aufl. Es ist nach obiger Formel

$$V = \sqrt{12^2 + 7^2 + 12.7.\cos 56^0} = 16{,}939 \text{ Fuß}.$$

Sind mehr als zwei Geschwindigkeiten in einer Ebene zusammenzusetzen, so kann dieß, wie bei den Kräften, sowohl durch wieder-

holte Anwendung des Parallelogramms der Geschwindigkeiten, als auch durch Rechnung geschehen.

Deßgleichen können mehrere Geschwindigkeiten im Raume auf dieselbe Weise wie die Kräfte in eine zusammengesetzt werden, oder man kann die wirkliche Geschwindigkeit des Punktes durch Rechnung und Construction bestimmen. Man hat hier auch ein Parallelepipedon der Geschwindigkeiten.

Ein anschauliches Beispiel von mehreren gleichzeitigen Geschwindigkeiten gibt uns eine Kugel, welche auf einem bewegten Schiffe nach beliebiger Richtung hin bewegt wird. Diese besitzt: 1) ihre eigene Geschwindigkeit; 2) die Geschwindigkeit des Schiffes; 3) die Geschwindigkeit, mit welcher die Erde sich um ihre Axe dreht; 4) diejenige, mit welcher die Erde sich um die Sonne bewegt; 5) diejenige, mit welcher vielleicht das ganze Sonnensystem sich bewegt.

§. 176.

Relative Bewegung zweier Punkte. Wenn zwei Punkte sich in Bewegung befinden, so heißt man die Bewegung des einen in Beziehung auf den andern die relative Bewegung beider Punkte. Bewegen sich die beiden Punkte **A** und **B** mit den Geschwindigkeiten v und v' in einer geraden Linie oder in geraden parallelen Linien in entgegengesetztem Sinne, so wird der Punkt **A** in der Zeiteinheit den Weg v und **B** den Weg v' zurücklegen. Sie werden also in der Zeiteinheit sich um den Weg $v + v'$ von einander entfernt haben und in t Zeiteinheiten werden sie demnach sich um den Weg $(v + v')\,t$ weiter als im Anfange dieser Zeit von einander entfernt oder den Weg $s = (v + v')\,t$ zurückgelegt haben. Es ist also gerade, als sei der eine Punkt in Ruhe geblieben und der andere habe sich mit der Geschwindigkeit $(v + v')$ bewegt. Es ist somit die relative Geschwindigkeit zweier in entgegengesetztem Sinne sich bewegenden Punkte gleich der Summe ihrer absoluten Geschwindigkeiten.

Ein Beispiel hierzu geben zwei Bahnzüge, die sich auf derselben Bahn oder auf einer Bahn mit doppeltem Schienengeleise in entgegengesetzten Richtungen bewegen. Besitzt der eine die Geschwindigkeit von 36 Fuß, der andere von 40 Fuß, so ist ihre relative Geschwindigkeit $36 + 40 = 76$ Fuß. Diese Bewegung macht auf die Personen im einen Wagenzug den Eindruck, als befinde der, in dem sie sitzen, sich in Ruhe, und der andere bewege sich mit einer Geschwindigkeit von 76 Fuß an ihnen vorüber.

Bewegen sich die Punkte **A** und **B** in gleichem Sinne, so werden sie sich in der Zeiteinheit von ihrer anfänglichen Lage um $v - v'$ von einander entfernt haben, in t Secunden also um den Weg $(v - v')\,t$ weiter von einander entfernt sein. Ihre relative Geschwindigkeit ist demnach $v - v'$. Wenn also zwei Punkte in gleichem Sinne sich bewegen, so ist ihre relative Ge-

schwindigkeit gleich der Differenz ihrer absoluten Geschwindigkeiten.

Bewegen sich die beiden oben angeführten Wagenzüge in demselben Sinne, so ist ihre relative Geschwindigkeit gleich 40 — 36 = 4 Fuß, oder man wird im einen Wagenzug glauben, der erste sei in Ruhe und der andere bewege sich nur mit 4 Fuß Geschwindigkeit.

§. 177.

Bilden die Bewegungsrichtungen beider Punkte einen Winkel mit einander, so kann man ihre relative Geschwindigkeit folgendermaßen bestimmen. Es stelle AC die Geschwindigkeit des Punktes A, Fig. 153, der Richtung und Größe nach dar, BD die des Punktes B. In der gegenseitigen Bewegung beider Punkte wird nun nichts geändert werden, wenn man beiden Punkten noch eine gemeinschaftliche Bewegung ertheilt. Man gebe daher beiden noch eine gemeinschaftliche Bewegung, welche gleich und gerade entgegengesetzt der des Punktes B sei. Hierdurch kommt der Punkt B zur Ruhe und der Punkt A hat dann zwei Geschwindigkeiten AC und AG, welch letztere gleich der des Punktes B ist. Construirt man nun das Parallelogramm ACFG, so ist die Diagonale AF die relative Geschwindigkeit beider Punkte, oder es drückt AF die Bewegung von A gegen B aus.

Ertheilt man beiden Punkten eine Bewegung gleich und entgegengesetzt der des Punktes A, Fig. 154, so kommt A zur Ruhe und B hat dann zwei Geschwindigkeiten, BD und BE. Die Diagonale BF ist alsdann die relative Geschwindigkeit beider Punkte und es ist AF = BF. Es gibt hier BF die relative Bewegung von B gegen A an.

Zweites Kapitel.

Von der ungleichförmigen Bewegung.

§. 178.

Gleichförmig beschleunigte Bewegung. Die Bewegung eines Punktes ist gleichförmig beschleunigt, wenn seine Geschwindigkeit in gleichen Zeiten um gleich viel stetig zunimmt. Die Aenderung der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit nennt man Beschleunigung. Es sei G die Beschleunigung, v die nach der Zeit t erlangte Geschwindigkeit. Geht der Punkt vom Zustand der Ruhe aus, so ist seine Geschwindigkeit nach der ersten Secunde = G, nach der zweiten Secunde = 2G, nach 3 Secunden 3G, nach t Secunden G . t, daher ist:

$$v = Gt \quad . \; . \; . \; 1.$$

$$t = \frac{v}{G} \quad . \; . \; . \; 2.$$

$$G = \frac{v}{t} \quad . \; . \; . \; 3.$$

Nach einer andern Zeit t' sei die Geschwindigkeit v', so ist $v' = Gt'$. Man hat nun die Proportion:

$$v:v' = Gt:Gt'$$

$$v:v' = t:t' \;.\;.\;.\; 4$$

d. h. **bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung verhalten sich die Endgeschwindigkeiten wie die Zeiten.**

Aufg. 1. Die Beschleunigung eines vom Zustande der Ruhe ausgehenden Punktes beträgt 2 Mtr., welche Geschwindigkeit besitzt er nach 18 Secunden?

Aufl. Es ist $G = 2$; $t = 18$; daher $v = 2 . 18 = 60$ Mtr.

Aufg. 2. Ein Punkt hat innerhalb 20 Secunden eine Geschwindigkeit von 100 Mtr. erlangt, welches ist seine Beschleunigung?

Aufl. Es ist $v = 100$; $t = 20$, also $G = \frac{100}{20} = 5$ Mtr.

Geometrisch läßt sich die gleichförmig beschleunigte Bewegung auf folgende Art darstellen. Schneidet man auf der Abscissenlinie AB, Fig. 155, die gleichen Theile Ab = bc = cd . . . gleich den einzelnen Zeittheilchen ab und errichtet in den Endpunkten b, c, d . . . Ordinaten bb′, cc′, dd′ . . ., welche den Endgeschwindigkeiten entsprechen, so stellt die aufsteigende gerade Linie AC, welche durch die Punkte A′, b′, c′ . . . C geht, die fragliche Bewegung graphisch dar. Daß die Linie AC eine gerade sei, ergibt sich nach Gl. 4 Ab:Ac: Ad . . . = bb′:cc′:dd′. . . .

§. 179.

Wir wollen nun den Raum s bestimmen, den der Punkt in einer gegebenen Zeit t durchläuft. Zu dem Ende stelle die Linie AB, Fig. 155, die Zeit t dar; diese theile man in unendlich viele unendlich kleine Theile Ab, bc, cd . . ., errichte in den Theilungspunkten die die betreffenden Geschwindigkeiten darstellenden Ordinaten bb′, cc′, dd′ . . . und ziehe die zu AB parallelen Linien $b'b_2$, $c'c_2$, $d'd_2$ . . ., so stellen b_2c', c_2d' . . . den Zuwachs an Geschwindigkeit in den aufeinander folgenden Zeittheilchen dar. Betrachtet man nun die Bewegung während eines solchen unendlich kleinen Zeittheilchens cd, so kann man annehmen, diese erfolge gleichförmig mit einer Geschwindigkeit, welche dem arithmetischen Mittel der beiden Geschwindigkeiten am Anfange und am Ende dieses Zeittheilchens gleichkommt, nämlich gleich $\left(\frac{cc' + dd'}{2}\right)$. Man erhält also den während dieses Zeittheilchens durchlaufenen Weg, wenn man diese Geschwindigkeit mit der Zeit cd multiplicirt. Demnach ist dieser Weg $\left(\frac{cc' + dd'}{2}\right) . cd$. Dieß ist aber nichts anders, als der Flächeninhalt des Paralleltrapezes c′cdd′. Auf dieselbe Weise findet man den Weg für jedes Zeittheilchen. Man sieht also, daß die während der einzelnen Zeittheilchen durchlaufenen Räume durch die entsprechenden Trapeze dargestellt

werden. Der ganze während der Zeit AB = t von dem Punkt durchlaufene Raum ist folglich gleich der Summe sämmtlicher Paralleltrapeze mehr dem Inhalt des Dreiecks Abb', welcher dem Raum für's erste Zeittheilchen entspricht. Sämmtliche Trapeze mit dem Dreieck Abb' bilden aber den Inhalt des Dreiecks ABC. Also ist der durchlaufene Raum durch den Inhalt desselben dargestellt. Man hat somit

$$s = \frac{AB \cdot BC}{2}.$$

Nun ist aber BC die der Zeit AB = t entsprechende Endgeschwindigkeit v. Setzt man daher v = Gt für BC und t für AB, so wird

$$s = \frac{vt}{2}$$

$$s = \frac{1}{2} Gt^2 \ldots 1.$$

Setzt man den Werth $t = \frac{v}{G}$ in diese Gleichung, so folgt auch

$$s = \frac{1}{2} G.\left(\frac{v}{G}\right)^2 \text{ oder}$$

$$s = \frac{v^2}{2G} \ldots 2.$$

und daraus:

$$v^2 = 2Gs,\ v = \sqrt{2Gs} \ldots 3.$$

$$G = \frac{v^2}{2s} \ldots 4.$$

Ferner aus 1:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{G}} \ldots 5.$$

$$G = \frac{2s}{t^2} \ldots 6.$$

Aufg. 1. Die Beschleunigung eines Punktes beträgt 2,5 Mtr., welchen Weg wird er in 35 Secunden zurücklegen und welche Geschwindigkeit wird er dann besitzen?

. Aufl. Es ist G = 2,5; t = 35, daher nach Gl. 1

$$s = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 35^2 = 1531{,}75 \text{ Mtr.}$$

Ferner ist v = Gt = 2,5 . 35 = 87,5 Mtr.

Aufg. 2. Ein Körper hat in einer Minute einen Weg von 2700 Mtr. zurückgelegt, welches ist seine Beschleunigung?

Aufl. Es ist s = 2700; t = 60 Secunden, daher nach Gl. 6

$$G = \frac{2 \cdot 2700}{60^2} = 1{,}5 \text{ Mtr.}$$

§. 180.

Für eine andere Zeit t' sei der durchlaufene Weg s'. Dann ist $s' = \frac{1}{2} Gt'^2$. Man hat somit die Proportion:

$$s : s' = \frac{1}{2} Gt^2 : \frac{1}{2} Gt'^2$$

$$s : s' = t^2 : t'^2$$

d. h. **die durchlaufenen Wege verhalten sich wie die Quadrate der Zeiten.**

Nun verhält sich aber auch nach §. 178, Gl. 4

$$v : v' = t : t'$$

oder: $$v^2 : v'^2 = t^2 : t'^2$$

daher folgt auch: $$s : s' = v^2 : v'^2$$

d. h. **die Räume verhalten sich wie die Quadrate der Endgeschwindigkeiten.**

Diese beiden Sätze lassen sich gleichfalls an der Figur 155 geometrisch nachweisen. Ist $Ad = t'$; $dd' = v'$, so stellt $\triangle Add'$ den während der Zeit t' durchlaufenen Raum dar. Nun ist $\triangle Add' \sim \triangle ABC$, daher

$$\triangle ABC : \triangle Add' = AB^2 : Ad^2 = BC^2 : dd'^2$$

oder: $$s : s' = t^2 : t'^2 = v^2 : v'^2.$$

Sind s, s' die bei den Beschleunigungen G, G' in derselben Zeit zurückgelegten Räume, so ist

$$s : s' = \frac{1}{2} Gt^2 : \frac{1}{2} G't^2$$

$$s : s' = G : G'$$

d. h. **die Räume verhalten sich wie die Beschleunigungen.**

Nach dem Obigen verhalten sich die in den aufeinander folgenden Zeiten 0, 1, 2, 3, 4, 5 . . . von Anfang an zurückgelegten Wege wie die Quadratzahlen $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2$ . . . Die Differenzen der Glieder dieser Reihe sind aber 1, 3, 5, 7, 11 . . ., welche die Verhältnißzahlen der Zunahmen der durchlaufenen Wege sind, und es folgt: **Die Zunahmen der Räume oder Wege verhalten sich wie die ungeraden Zahlen.**

Der Raum, den ein Punkt bei gleichförmig beschleunigter Bewegung durchläuft, ist $s = \frac{vt}{2}$. Würde der Punkt sich die gleiche Zeit t hindurch gleichförmig bewegen mit einer Geschwindigkeit $\frac{v}{2}$, so würde er gleichfalls den Raum $s = \frac{v}{2} . t$ durchlaufen. Es folgt also: **Der Weg, den ein gleichförmig beschleunigter Punkt vom Zustand der Ruhe aus in einer Zeit durchläuft, ist gleich dem Weg, den derselbe Punkt durchlaufen würde,**

wenn er sich die gleiche Zeit hindurch mit der halben Endgeschwindigkeit gleichförmig bewegen würde.

§. 181.

Wenn der bewegte Punkt beim Beginne der Zeit t schon eine Anfangsgeschwindigkeit V besitzt, so läßt sich die in der Zeit t erlangte Endgeschwindigkeit v, sowie der in dieser Zeit zurückgelegte Raum s auf folgende Weise bestimmen. Es sei Fig. 156 die Abscissenlinie und Aa, ab, bc ... die gleichen unendlich kleinen Zeittheilchen. AA′ die im Anfange der Zeit t vorhandene Geschwindigkeit V. Geht nun der Punkt mit beschleunigter Geschwindigkeit weiter, so wird er nach der Zeit AB = t die Geschwindigkeit BC besitzen. Zieht man A′B′ parallel zu AB, so ist BC = BB′ + B′C = V + B′C. Die Anfangsgeschwindigkeit ist also vermehrt um diejenige, welche der Punkt erlangt, wenn er sich vom Zustand der Ruhe aus dieselbe Zeit hindurch mit beschleunigter Geschwindigkeit bewegt. Nun ist aber B′C = Gt, BC = v, also

$$v = V + Gt \;...\; 1.$$

Der Weg, welchen der Punkt in der Zeit t zurücklegt, ist geometrisch repräsentirt durch die Figur AA′CB, welche besteht aus dem Rechteck AA′B′B und dem Dreieck A′BC. Der Inhalt des ersten ist aber AA′.AB = Vt; der des letztern $\frac{B'C \,.\, A'B'}{2} = \frac{Gt}{2} . t = \frac{1}{2} Gt^2$; daher ist

$$s = Vt + \frac{1}{2} Gt^2 \;...\; 2.$$

Aus 1 folgt:

$$t = \frac{V - v}{G} \;...\; 3.$$

$$G = \frac{V - v}{t} \;...\; 4.$$

Setzt man den Werth von t aus 3 in Gl. 2, so wird

$$s = \frac{v^2 - V^2}{2G} \;...\; 5.$$

$$v^2 = V^2 + 2Gs \;...\; 6.$$

Setzt man den Werth von G Gl. 4 in 2, so ist auch

$$s = \frac{V + v}{2} . t \;...\; 7.$$

Aufg. Welche Geschwindigkeit erlangt ein Körper in 20 Secunden und welchen Raum durchläuft er in dieser Zeit, wenn seine Anfangsgeschwindigkeit 2 Mtr. und seine Beschleunigung 1,2 Mtr. beträgt?

Aufl. Hier ist V = 2; G = 1,2; t = 20; daher nach Gl. (1)

$$v = 2 + 1{,}2 . 20 = 26 \text{ Mtr.}$$

und nach Gl. (2) $s = 2 . 20 + \frac{1}{2} . 1{,}2 . 20^2 = 280$ Mtr.

§. 182.

Gleichförmig verzögerte Bewegung. Bei der gleichförmig verzögerten Bewegung nimmt die Geschwindigkeit in jeder Secunde um gleichviel ab. Die Geschwindigkeitsabnahme kann als eine negative Zunahme betrachtet werden. Es ist also die Geschwindigkeitsänderung oder die Beschleunigung hier negativ. Man kann daher die Gleichungen für diese Bewegung aus den Gleichungen des vorigen Paragraphen ableiten, wenn man in denselben $- G$ statt $+ G$ setzt. Demzufolge erhält man die Gleichungen:

$$v = V - Gt \ . \ . \ . \ 1.$$

$$s = Vt - \frac{1}{2} Gt^2 \ . \ . \ . \ 2.$$

$$s = \frac{V^2 - v^2}{2G} \ . \ . \ . \ 3.$$

$$v^2 = V^2 - 2Gs \ . \ . \ . \ 4.$$

$$t = \frac{V - v}{G} \ . \ . \ . \ 5.$$

$$s = \frac{V + v}{2} . t \ . \ . \ . \ 6.$$

Bezeichnet Fig. 157 die Abscissenlinie AB die Zeit, die Ordinate AD die Anfangsgeschwindigkeit, BC die Endgeschwindigkeit, so ist diese Bewegung durch die gegen die Abscissenlinie sich neigende Linie DC geometrisch dargestellt und der durchlaufene Raum durch den Inhalt der Figur ABCD repräsentirt.

§. 183.

Ungleichförmig beschleunigte oder verzögerte Bewegung. Wenn die Geschwindigkeitszunahme in den auf einander folgenden Zeiteinheiten ungleich ist, so ist die Bewegung eine ungleichförmig beschleunigte. Sie kann graphisch dargestellt werden durch eine aufsteigende krumme Linie CD, Fig. 158, welche entweder ihre concave oder convexe Seite der Abscissenlinie zukehrt. Bezeichnet $AB = t$ die Zeit, AC die Geschwindigkeit im Anfange, BD die am Ende der Zeit t, so wird der in dieser Zeit zurückgelegte Raum durch den Inhalt der Figur ABDC ausgedrückt. Dieser Raum wird gefunden, wenn man die Zeit in sehr viele kleine Zeitelemente ce theilt, die Ordinaten cd gleich den entsprechenden Geschwindigkeiten errichtet, wodurch die ganze Figur in Streifen von sehr kleiner Breite zerlegt wird. Während eines solchen Zeitelements kann man die Geschwindigkeit gleichförmig annehmen und es drückt daher der Flächeninhalt des Rechtecks $ce \times cd$ den in diesem Zeitelemente durchlaufenen Raum aus. Verfährt man auf gleiche Weise mit den übrigen Streifen, so gibt die Summe der Inhalte sämmtlicher Streifen den Flächeninhalt der ganzen Figur oder den während der Zeit t zurückgelegten Weg.

Bei der ungleichförmig verzögerten Bewegung ist die Geschwindigkeitsabnahme in den aufeinander folgenden Zeiteinheiten ungleich. Diese Bewegung kann graphisch durch eine krumme gegen die Abscissenaxe zulaufende Linie CD, Fig. 159, dargestellt werden. Der in einer bestimmten Zeit durchlaufene Raum wird gleichfalls durch den Inhalt der Figur ABDC bestimmt.

§. 184.

Periodische Bewegung. Es gibt außer den bisher erwähnten noch unzählig viele Arten von ungleichförmiger Bewegung. Unter diesen sind namentlich die periodischen und schwingenden zu erwähnen, da sie bei sehr vielen Maschinen vorkommen. Ein Pumpenkolben, der durch eine gleichförmig im Kreise herumgehende Kurbel bewegt wird, die Wellenbewegung der Luft, des Wassers, des Aethers; die Bewegung der Planeten geben Beispiele einer solchen Bewegung. Nimmt man wieder die Zeiten als Abscissen, die Geschwindigkeiten als Ordinaten, so kann eine solche Bewegung graphisch als eine krumme Linie dargestellt werden. Nimmt nach gleichen Zeitabschnitten der bewegte Punkt stets wieder die gleiche Geschwindigkeit an, so stellt Fig. 160 CbdfD eine solche periodische Bewegung dar. Hier bezeichnet Ac die Zeit einer Periode, ab die größte, cd die kleinste und AC = cf die mittlere Geschwindigkeit vor. Zieht man im Abstande der mittlern Geschwindigkeit die Linie CD parallel zu AB, so schneidet sie von der Bewegungscurve gleiche Räume ab und ist gewissermaßen die Axe, um welche sich diese windet und repräsentirt eine gleichförmige Bewegung, die der bewegte Punkt fortwährend anzunehmen strebt, aber durch eine regelmäßig wiederkehrende Ursache gehindert wird, so daß er die erstrebte mittlere Geschwindigkeit nur in einzelnen Zeitpunkten erreicht.

§. 185.

Zusammensetzung und Zerlegung der Beschleunigungen. Aus der Verbindung mehrerer gleichförmig beschleunigten Bewegungen entsteht wieder eine geradlinige gleichförmig beschleunigte. Um zuerst die resultirende von zwei solcher Bewegungen zu bestimmen, welche ein Punkt nach zwei verschiedenen sich schneidenden Richtungen besitzt, denken wir uns eine gerade Linie AB, Fig. 152, bewege sich parallel mit sich selbst und gleichförmig beschleunigt mit der Beschleunigung G, und ein Punkt bewege sich ebenfalls gleichförmig beschleunigt mit der Beschleunigung G′ von A nach B, beide vom Zustand der Ruhe ausgehend. Nach einer Zeit t gelange die Gerade in die Lage CD. und der Punkt nach B. Der Punkt besitzt demnach zwei Bewegungen, seine eigene auf der Linie und die der Linie zugleich und wird also nach der Zeit t sich in D befinden. Der Punkt A der Linie hat den Weg AC mit gleichförmiger Beschleunigung durchlaufen, ebenso der Punkt B die Linie BD und es wird ABCD ein Parallelogramm bilden. Nach irgend einer Zeit t′ sei die Gerade in

die Lage ab gekommen und der Punkt nach c. Nun ist $AC = \frac{1}{2} G't^2$; $CD = AB = \frac{1}{2} Gt^2$; $Aa = \frac{1}{2} G't'^2$; $ac = \frac{1}{2} Gt'^2$; es ist demnach:

$$Aa : AC = \frac{1}{2} G't'^2 : \frac{1}{2} G't^2 = t'^2 : t^2$$

$$ac : CD = \frac{1}{2} Gt'^2 : \frac{1}{2} Gt^2 = t'^2 : t^2.$$

Somit folgt:

$$Aa : AC = ac : CD.$$

Ferner ist $\sphericalangle\, Aac = \sphericalangle\, ACD$, folglich ist $\triangle\, Aac \sim \triangle\, ACD$; demnach ist auch $\sphericalangle\, aAc = \sphericalangle\, CAD$. Es liegen also die drei Punkte A, c, D in einer geraden Linie oder in der Diagonale AD des Parallelogramms. Es ist folglich die Bewegung des Punktes eine geradlinige. Aus der Aehnlichkeit beider Dreiecke folgt ferner:

$$Ac : AD = ac : CD = t'^2 : t^2.$$

Hiernach verhalten sich die Wege des Punktes in der Diagonale wie die Quadrate der Zeiten, folglich ist die Bewegung desselben eine gleichförmig beschleunigte.

Die Beschleunigung in der Diagonale sei G″, dann hat man, da sämmtliche Bewegungen gleichförmig beschleunigt sind:

$$AB : AC : AD = \frac{1}{2} Gt^2 : \frac{1}{2} G't^2 : \frac{1}{2} G''t^2$$

oder: $AB : AC : AD = G : G' : G''$,

d. h. diese drei Linien verhalten sich wie die Beschleunigungen. Wird nun t als eine Secunde angenommen, so können diese Linien selbst als die Beschleunigungen angesehen werden und die Diagonale AD ist demnach die resultirende Beschleunigung aus den beiden Seitenbeschleunigungen AB und AC. Das Parallelogramm ABDC heißt man deßhalb das **Parallelogramm der Beschleunigungen**.

Durch Anwendung dieses Parallelogramms kann man also mehrere Beschleunigungen in eine zusammensetzen und eine in mehrere Seitenbeschleunigungen zerlegen.

§. 186.

Zusammensetzung von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. Besitzt ein Punkt nach verschiedenen Richtungen zwei Bewegungen gleichzeitig, wovon die eine gleichförmig ist, die andere aber gleichförmig beschleunigt, so ist seine wirkliche Bewegung eine krummlinige, gänzlich ungleichförmig beschleunigte. Es sei, Fig. 161, Ay die Richtung der gleichförmigen Bewegung, Ax die der gleichförmig beschleunigten. Man trage auf Ay die Stücke AB = BC = CD . . . gleich der Geschwindigkeit v ab und ebenso auf der Richtung Ax die Stücke AE, AF, AG . . ., welche die Wege darstellen, die der Punkt nach den einzelnen Zeiteinheiten vermöge der

Beschleunigung G durchlaufen würde, construire sodann die Parallelogramme ABHE, ACJF . . ., so sind A, H, J . . . Punkte der vom Punkt durchlaufenen Bahn. Gelangt der Punkt nach irgend einer Zeit t nach D, so ist sein Weg nach dieser Richtung AD = vt. Vermöge der Beschleunigung G gelange er in derselben Zeit nach G, so ist $AG = \frac{1}{2} Gt^2$. Setzt man AD = y, AG = x, so hat man $x = \frac{1}{2} Gt^2$, $y = vt$. Aus der letzten Gleichung folgt $t = \frac{y}{v}$; setzt man diesen Werth in die erste, so folgt $x = \frac{G.y^2}{2v^2}$ oder $y^2 = \frac{2v^2}{G}.x$. Da dieß die Gleichung einer Parabel ist, so folgt, daß der Körper sich in einer Parabel bewegt.

Ein Wasserstrahl, der aus einer horizontalen Röhre tritt, bildet eine Parabel. Die Wassertheile haben zwei Bewegungen, eine horizontale, vermöge der Druckkraft, und eine verticale, vermöge der Schwerkraft der Erde. Aus beiden entsteht die Parabelbewegung.

Freier Fall und Wurfbewegung.

§. 187.

Freier Fall. Eine der wichtigsten gleichförmig beschleunigten Bewegungen zeigt uns der freie Fall der Körper. Die Schwerkraft als Ursache des Fallens nimmt zwar nach dem Quadrate der Entfernungen von der Erde ab. Jedoch können wir sie innerhalb der Räume, welche hier in Betracht kommen, als constant ansehen. Die Bewegung eines freifallenden Körpers im luftleeren Raume ist daher eine gleichförmig beschleunigte. Die Gesetze, welche wir für diese Art der Bewegung im Allgemeinen entwickelt haben, lassen sich somit auf diesen speciellen Fall anwenden. Die Beschleunigung der Schwere wollen wir mit g bezeichnen. Sie ändert sich zwar von den Polen gegen den Aequator hin, ist aber für denselben Ort constant. Der Werth von g ist für verschiedene Orte ermittelt und es ist für:

Frankreich	g =	9,80896 Meter.
England	g =	32,20 englische Fuß.
Baden	g =	32,696 bad. Fuß.
Oesterreich	g =	31,03 Wiener Fuß.
Preußen	g =	33,60 hannov. Fuß.
Sachsen	g =	34,64 Dresdner Fuß.

Fällt der Körper vom Zustand der Ruhe aus und setzt man in den allgemeinen Gleichungen der Paragraphe 178, 179 g statt G, so erhält man folgende Gleichungen:

$$v = gt \;.\;.\;.\; 1.$$

$$s = \frac{1}{2} gt^2 = \frac{1}{2} vt \;.\;.\;.\; 2.$$

$$v^2 = 2gs,\ v = \sqrt{2gs} \ . \ . \ . \ 3.$$

$$s = \frac{v^2}{2g} \ . \ . \ . \ 4.$$

$$t = \frac{v}{g} = \sqrt{\frac{2s}{g}} \ . \ . \ . \ 5.$$

Man nennt $s = \frac{v^2}{2g}$ die Fallhöhe oder Geschwindigkeitshöhe, welche der Geschwindigkeit v entspricht, und $v = \sqrt{2gs}$ die zur Fallhöhe s gehörige Geschwindigkeit.

Nimmt man t gleich eine Secunde, so ist $s = \frac{1}{2} g . 1^2 = \frac{1}{2} g$. Es ist also $\frac{1}{2} g$ der in der ersten Secunde durchlaufene Weg.

Für Baden ist $\frac{1}{2} g = 16{,}348$ Fuß, für Frankreich $\frac{1}{2} g = 4{,}9$ Mtr.

Aufg. 1. Ein freifallender Körper fällt 4 Secunden lang; welche Geschwindigkeit hat er alsdann und welche Höhe hat er durchfallen?

Aufl. Nimmt man g in bad. Fußen, so ist nach Gl. 1 $v = 32{,}696 . 4 = 130{,}784$ Fuß; nach Gl. 2 $s = \frac{1}{2} . 32{,}696 . 4^2 = 261{,}568$ Fuß.

Aufg. 2. In wie viel Zeit wird ein Körper von einer Höhe von 375 Fuß herabfallen und welche Geschwindigkeit wird er alsdann besitzen?

Aufl. Nach Gl. 5 ist $t = \sqrt{\frac{2 . 375}{32{,}696}} = 4{,}28$ Secunden; nach Gl. 3 ist $v = \sqrt{2 . 32{,}696 . 375} = 155{,}5$ Fuß.

§. 188.

Besitzt der frei fallende Körper im Anfange der Zeit t schon eine Anfangsgeschwindigkeit V, so ist nach §. 181

$$v = V + gt \ . \ . \ . \ 1.$$

$$s = Vt + \frac{1}{2} gt^2 \ . \ . \ . \ 2.$$

$$s = \frac{v^2 - V^2}{2g} \ . \ . \ . \ 3.$$

$$v^2 = V^2 + 2gs \ . \ . \ . \ 4.$$

$$s = \frac{V + v}{2} . t \ . \ . \ . \ 5.$$

Aufg. Ein frei fallender Körper hat in einem gewissen Augenblick eine Geschwindigkeit von 40 Fuß; welche Geschwindigkeit besitzt er nach 5 Secunden und welchen Raum durchfällt er in dieser Zeit?

Aufl. Hier ist $V = 40$, $t = 5$; daher nach Gl. 1 $v = 40 + 32{,}696 . 5 = 203{,}48$ Fuß und nach Gl. 2 $s = 40 . 5 + \frac{1}{2} . 32{,}696 . 5^2 = 408{,}7$ Fuß.

§. 189.

Senkrechter Wurf. Wird ein Körper vertical aufwärts geworfen, so ist seine Bewegung eine gleichförmig verzögerte, da die Schwerkraft beständig auf ihn verzögernd einwirkt. Es ist daher g negativ und man hat mit Bezug auf §. 182 folgende Gleichungen:

$$v = V - gt \;.\;.\;.\; 1.$$

$$s = Vt - \frac{1}{2} gt^2 \;.\;.\;.\; 2.$$

$$v^2 = V^2 - 2gs \;.\;.\;.\; 3.$$

$$s = \frac{v^2 - V^2}{2g} \;.\;.\;.\; 4.$$

Da die Geschwindigkeit fortwährend abnimmt, so wird dieselbe nach einer Zeit T Null werden und der Körper wird anfangen umzukehren.

Ist S die bis dahin erreichte Höhe, so ist für $v = 0$

$$0 = V - gT$$

und

$$0 = V^2 - 2gS$$

also folgt

$$T = \frac{V}{g} \;.\;.\;.\; 5.$$

$$V = gT \;.\;.\;.\; 6.$$

$$V^2 = 2gS \;.\;.\;.\; 7.$$

$$S = \frac{V^2}{2g} \;.\;.\;.\; 8.$$

Aus 6 und 7 folgt auch leicht

$$S = \frac{1}{2} gT^2;\; S = \frac{VT}{2} \;.\;.\;.\; 9.$$

Man hat hier dieselben Gleichungen erhalten, wie für den freien Fall ohne Anfangsgeschwindigkeit, und es ergibt sich aus der Betrachtung derselben, daß ein Körper dieselbe Zeit braucht, um die Höhe S, wo seine Geschwindigkeit Null wird, zu erreichen, die er braucht, um vom Zustand der Ruhe aus von derselben Höhe herabzufallen. Ferner, daß er, um eine solche Höhe zu erreichen, mit derselben Anfangsgeschwindigkeit geworfen werden muß, die er erreicht, wenn er von dieser Höhe frei herabfällt.

Aufg. Ein Körper wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 600 Fuß senkrecht in die Höhe geworfen; welche Geschwindigkeit besitzt er in einer Höhe von 1000 Fuß, nach welcher Zeit wird seine Geschwindigkeit Null und welche Höhe hat er alsdann erreicht?

Aufl. Es ist nach Gl. 3 $v = \sqrt{600^2 - 2.32{,}696.1000}$ $= 542{,}7$ Fuß; nach Gl. 5 $T = \frac{V}{g} = \frac{600}{32{,}696} = 18{,}3$ Secunden; nach Gl. 8 $S = \frac{600^2}{2.32{,}696} = 5552{,}6$ Fuß.

Es habe der Körper x Zeiteinheiten vor dem Umkehren die Ge-

schwindigkeit v′ und die Höhe s′ erreicht, so ist $t = T - x = \frac{V}{g} - x$. Setzt man diesen Werth in Gl. 1 und 2, so folgt $v' = V - g\left(\frac{V}{g} - x\right) = gx$; ferner $s' = \frac{V^2}{2g} - \frac{1}{2}gx^2$. Besitzt er x Zeiteinheiten nach dem Umkehren die Geschwindigkeit v″ und ist s″ die Höhe, in der er sich in diesem Augenblick befindet, so hat man $t = T + x = \frac{V}{g} + x$. Setzt man diesen Werth abermals in die genannten Gleichungen, so erhält man $v'' = -gx$ und $s'' = \frac{V^2}{2g} - \frac{1}{2}gx^2$. Aus dieser Untersuchung folgt also, daß der Körper gleiche Zeit vor und nach dem Umkehren sich in gleicher Höhe befindet und in gleicher Höhe beim Auf- und Abwärtsgehen stets dieselbe Geschwindigkeit besitze.

§. 190.

Wurf unter irgend einem Winkel. Wir wollen annehmen, ein Körper werde von A aus, Fig. 162, nach der Richtung AL mit einer Geschwindigkeit v im luftleeren Raume geworfen, und es bilde diese Wurfrichtung mit der Horizontallinie AB den Elevationswinkel $BAL = \alpha$. Der Körper ist nun zwei Kräften unterworfen, der Wurfkraft, die ihn nach der Richtung AL treibt, und der Schwerkraft, welche ihn beständig vertical abwärts bewegt. Da er nun keiner dieser Richtungen frei folgen kann, so wird er eine Bahn beschreiben, welche nach §. 186 eine Parabel sein wird. Um nun die Gleichung für die Bahn herzuleiten, sei AG der Weg, welchen der Körper gleichförmig in der Zeit t zurücklegen würde, wenn die Schwerkraft nicht auf ihn wirkte, und AH der Weg, welchen er in derselben Zeit frei durchfallen würde, wenn die Geschwindigkeit v nicht vorhanden wäre. Der Körper wird sich nun nach der Zeit t weder in G noch in H befinden, sondern in einem Punkte F, welchen man erhält, wenn man EK vertical und HF parallel zu AG zieht. Dann ist GF = AH der Weg, um welchen der Körper in der Zeit t durch die Schwerkraft abwärts gezogen wurde. Es muß also F ein Kurvenpunkt sein. Nun ist aber offenbar $AG = vt$ und $GF = \frac{1}{2}gt^2$. Wird nun AB als Abscissenlinie und A als der Anfangspunkt der Coordinaten gewählt, sodann $AK = x$, $FK = y$ gesetzt, so ist

$$x = AG \cos\alpha = vt.\cos\alpha \;.\;.\;.\; 1.$$

$$y = AG \sin\alpha - GF = vt \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 \;.\;.\;.\; 2.$$

Aus 1 ergibt sich die Zeit, in welcher eine gegebene horizontale Entfernung zurückgelegt wird

$$t = \frac{x}{v \cos\alpha} \;.\;.\;.\; 3.$$

Setzt man diesen Werth statt t in Gl. 2, so folgt

$$y = x \cdot \text{tang}\ \alpha - \frac{g}{2v^2\ \cos\ 2\alpha} \cdot x^2 \ \ldots\ 4.$$

§. 191.

Um nun den Punkt B zu bestimmen, wo der Körper den Horizont erreicht, erwäge man, daß für diesen Punkt die Ordinate $y = 0$ sein muß. Setzt man daher in Gl. 4 des vorigen Paragraphen $y = 0$, so erhält man:

$$0 = x \left(\text{tang}\ \alpha - \frac{g}{2v^2\ \cos^2 \alpha} \cdot x\right).$$

Hieraus ergibt sich aber:

$$x = 0 \text{ und } x = \frac{v^2 \sin\ 2\alpha}{g}.$$

Es zeigt sich also, daß man für $y = 0$ zwei Werthe für x erhält, wie es auch der Natur der Sache angemessen ist, da sowohl im Punkte A, als auch in B die Ordinate Null sein muß. Der erste Werth von x gilt somit für den Punkt A, der zweite für B. Man nennt nun die horizontale Entfernung AB die Wurfweite. Setzt man dieselbe gleich w, so hat man

$$w = \frac{v^2\ \sin\ 2\alpha}{g} \ \ldots\ 1.$$

Setzt man nun diesen Werth statt x in Gl. 3 des vorigen Paragraphen, so erhält man die Zeit, welche vergeht, bis der Körper von A nach B kommt, also:

$$t = \frac{2v \cdot \sin\ \alpha}{g} \ \ldots\ 2.$$

Eliminirt man v aus 1 und 2, so ergibt sich

$$t = \sqrt{\frac{2w\ \text{tang}\ \alpha}{g}} \ \ldots\ 3.$$

Nach Gl. 1 erhält die Wurfweite ihren größten Werth für $\alpha = 45^0$, weil dann $\sin 2\alpha = 1$ ist. Wenn man ferner einmal $\alpha = 45^0 - \beta$ und dann $\alpha = 45^0 + \beta$ setzt, so erhält man für beide Fälle denselben Werth für w. Es folgt also, daß für zwei Elevationswinkel, die sich zu 90^0 ergänzen, die Wurfweiten gleich sind. Die zugehörigen Zeiten sind aber verschieden, was sich ergibt, wenn diese Werthe für α in Gl. 2 substituirt werden.

§. 192.

Die größte Höhe, welche der Körper erreicht, heißt man die Culminationshöhe. Dieselbe wird gefunden, wenn man in Gl. 4, §. 190, den Werth von x so bestimmt, daß y ein Maximum wird. Sie kann jedoch auch durch die Betrachtung bestimmt werden, daß der Körper jedenfalls so lange steigt, bis seine verticale Seitengeschwindigkeit v sin α durch die Einwirkung der Schwere vernichtet

worden, oder gleich gt geworden ist; somit muß stattfinden gt = v sin α oder

$$t = \frac{v \sin \alpha}{g} \;.\;.\;.\; 1.$$

Setzt man diesen Werth in Gl. 2, §. 190, und bezeichnet mit h die Culminationshöhe, so erhält man:

$$h = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{2g} \;.\;.\;.\; 2.$$

Für die größte Wurfweite ist $w = \frac{v^2}{g}$ und $h = \frac{v^2}{2g}$, also ist jene doppelt so groß, wie die ihr entsprechende Culminationshöhe. Wenn man ferner Gl. 1 mit Gl. 2 des vorigen Paragraphen vergleicht, so ergibt sich, daß die Culminationszeit die Hälfte derjenigen beträgt, welche der Körper braucht, um die Wurfweite zu durchlaufen.

§. 193.

Wird der Körper horizontal geworfen, so wird $\alpha = 0$, also nach Gl. 4, §. 190

$$y = -\frac{g}{2v^2} . x^2$$

oder, wenn die Ordinaten unterhalb der Horizontalen als positiv angesehen werden,

$$y = \frac{g}{2v^2} . x^2.$$

§. 194.

Soll ein Punkt D, Fig. 163, außerhalb der Horizontalen getroffen werden, so fragt es sich, unter welchem Winkel und mit welcher Geschwindigkeit der Körper geworfen werden muß. Es seien die Coordinaten dieses Punktes AC = a, CD = b. Man setze in die allgemeine Gleichung 4 §. 190 die Abscisse x = a und die Ordinate y = b, so erhält man für den Punkt D die Gleichung:

$$b = a \operatorname{tang} \alpha - \frac{g}{2v^2 \cos^2 \alpha} . a^2 \;.\;.\;.\; 1.$$

Hieraus folgt die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{a}{\cos \alpha} . \sqrt{\frac{g}{2a \operatorname{tang} \alpha - 2b}} \;.\;.\;.\; 2.$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung $x = vt . \cos \alpha$ und a für x, so erhält man die zugehörige Zeit

$$t = \sqrt{\frac{2a \operatorname{tang} \alpha - 2b}{g}} \;.\;.\;.\; 3.$$

Zur Bestimmung des Elevationswinkels erhält man aus Gl. 1 da $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha}$ ist

$$\tang \alpha = \frac{v^2 \pm \sqrt{v^4 - g\,(a^2 g + 2bv^2)}}{ag} \quad . \; . \; . \; 4.$$

Hieraus ergibt sich, daß der Punkt D nur dann getroffen werden kann, wenn $v^4 > g\,(a^2 g + 2bv^2)$; ferner daß er unter zwei Elevationswinkeln getroffen werden kann, nämlich unter einem steileren und einem flacheren.

Beim Werfen der Geschützkugeln wählt man die steilere Wurfrichtung, wenn der Gegenstand D durch die Kugel von oben zerschmettert werden soll. Nach der mehr gegen den Horizont geneigten Richtung wird die Kugel dann geworfen, wenn sie, nachdem sie den Gegenstand D getroffen hat, noch weitere Zerstörungen anrichten, d. h. wenn sie ricochettiren soll.

§. 195.

Um noch die Gleichung der Bahn für den Fall abzuleiten, wo der Scheitel C, Fig. 162, als Anfangspunkt der Coordinaten angenommen wird, sei die Senkrechte CD die Abscissenaxe und für irgend einen Punkt F der Kurve $CN = x'$ die Abscisse und $FN = y'$ die Ordinate. Mit Bezug auf die bisherige Bezeichnung ist nun

$$x = \frac{1}{2} w - y'; \; y = h - x'.$$

Setzt man nun diese Werthe der alten Coordinaten in Gl. 4, §. 190, und zugleich die für w und h §. 191 und §. 192 gefundenen Ausdrücke, so erhält man nach gehöriger Reduction die Gleichung:

$$y'^2 = \frac{2v^2 \cos^2 \alpha}{g} \,.\, x'.$$

Hieraus geht ebenfalls hervor, daß die Bahn eine gemeine Parabel ist. Der Hauptparameter derselben ist also $= \frac{2v^2 \cos^2 \alpha}{g}$. In der Wirklichkeit weicht die Bahn jedoch wegen der vorhandenen Widerstände mehr oder weniger von dieser Form ab.

Drittes Kapitel.

Von der Bewegung fester Körper oder eines Systems und den bewegenden Kräften.

Von den bewegenden Kräften und ihrem Maße.

§. 196.

Atome. Die materiellen Körper denkt man sich aus unendlich kleinen absolut untheilbaren Körperchen bestehend, welche man Atome nennt. Jedes Körperatom denkt man sich umgeben von einer Aetherhülle. Den Körperatomen schreibt man Attractivkräfte zu, vermöge

welcher sie die Körperatome und Aetheratome anzuziehen im Stande sind. Die Aetheratome denkt man sich begabt mit Attractiv- und Repulsivkräften, so zwar, daß sie auf die Körperatome nur anziehend, auf die Aetheratome nur abstoßend wirken. Die Körperatome werden sich vermöge ihrer Attractivkräfte so lange einander nähern, bis die Repulsivkräfte der Aetheratome jenen das Gleichgewicht halten oder der Gleichgewichtszustand unter den Kräften eingetreten ist. Vermöge der den Atomen innewohnenden Kräften kann jedes derselben auf andere außer ihm befindliche Atome wirken, nie aber auf sich selbst, also auf seinen eigenen Zustand keinen Einfluß ausüben.

Die oben bezeichneten Kräfte nennt man auch die innern Kräfte eines Körpers oder die Molekülarkräfte, zum Unterschied solcher Kräfte, welche von außen auf den Körper einwirken und die man deßhalb auch äußere Kräfte nennt.

§. 197.

Masse. Die Menge der Materie eines Körpers nennt man seine Masse. Die Masse eines Körpers ist absolut unveränderlich, unzerstörbar. Man mag den Körper zertheilen, wie man will, ihn an jeden Ort versetzen, die Masse bleibt stets dieselbe. Das Gewicht eines Körpers ändert sich, wenn man denselben an verschiedene Orte der Erde bringt oder ihn auf einen andern Weltkörper versetzt denkt, aber seine Masse ist keiner Veränderung unterworfen. Es folgt also auch, daß Masse und Gewicht nicht gleichbedeutend sind.

§. 198.

Kräfte. Die Materie eines Körpers besitzt nicht die Fähigkeit, ihren Zustand der Ruhe oder Bewegung durch sich selbst zu ändern, sie ist absolut träge. Demnach liegt jeder Zustandsveränderung eine Ursache zu Grunde. Die Ursache dieser Zustandsveränderung nennen wir, wie früher schon gesagt, Kraft. Die Kräfte aber äußern sich durch Druck oder Zug, und zur Messung einer Kraft wird derjenige Druck oder Zug als Einheit angenommen, welchen ein Körper von 1 Kilogramm (oder 1 Pfund) Gewicht auf seine Unterlage oder gegen einen Faden, an dem er aufgehangen ist, ausübt. Die Kräfte werden aber auch gemessen durch die Geschwindigkeiten, welche sie den Körpern, worauf sie wirken, mittheilen.

Wirkt eine Kraft nur einen Augenblick auf einen Körper ein, oder ist die Zeitdauer ihrer Einwirkung unangebbar kurz, so wird eine solche eine Momentankraft genannt. Eine solche Kraft wird stets eine geradlinig gleichförmige Bewegung zur Folge haben.

Eine Kraft, welche einige Zeit hindurch ununterbrochen mit gleicher Intensität auf einen Körper wirkt, heißt eine constante Kraft. Wirkt eine solche auf einen ruhenden Körper, so wird sie denselben von dem Augenblicke ihrer Einwirkung an in Bewegung versetzen, ihm eine gewisse, wenn auch noch so kleine Geschwindigkeit ertheilen. Die Kraft wirkt aber anhaltend gleichmäßig, also wird auch die Be-

wegung stets wachsen, schneller werden und zwar gleichmäßig. Hat die Kraft in der Zeiteinheit eine gewisse Geschwindigkeitszunahme bewirkt, so wird sie in jeder folgenden Zeiteinheit die gleiche Geschwindigkeitszunahme bewirken. Denn nehmen wir an, die Kraft werde nach der ersten Zeiteinheit beseitigt, so würde der Körper mit der erlangten Geschwindigkeit, vermöge seiner Trägheit, in der Richtung der Kraft sich geradlinig gleichförmig weiter bewegen. Denken wir uns nun die Kraft auch in der zweiten Zeiteinheit wirksam, so wird sie dem Körper in derselben die gleiche Geschwindigkeit unabhängig von der vorhandenen wieder ertheilen, so daß also der Körper am Ende der zweiten Zeiteinheit die doppelte Geschwindigkeit besitzen muß, am Ende der dritten die dreifache u. s. f. Wir sehen also, daß eine constante Kraft eine gleichförmig beschleunigte Bewegung zur Folge hat. Wirkt die Kraft nicht immer mit gleicher Intensität, so wird sie eine ungleichförmig beschleunigte Bewegung erzeugen. Hat der Körper bereits eine Geschwindigkeit und eine constante Kraft wirkt nun auf ihn in der seiner Bewegung entgegengesetzten Richtung, so bewirkt dieselbe eine gleichförmig verzögerte Bewegung. Ist die Intensität nicht stets die gleiche, so wird die Bewegung eine ungleichförmig verzögerte.

Wir setzen hier voraus, daß alle materiellen Punkte eines Körpers sich nach gleichen parallelen Richtungen mit gleichen Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen bewegen, und daß also an denselben gleiche parallele Kräfte nach derselben Richtung thätig sind, die sich sofort in eine einzige Mittelkraft vereinigen lassen, deren Angriffspunkt der Schwerpunkt des Körpers ist. Es wird sich demnach der Körper gerade so bewegen wie ein materieller Punkt, an dem diese Kraft wirkt.

§. 199.

Maß für Momentankräfte. Soll eine Kraft eine Masse in Bewegung versetzen, so muß sie immerhin eine gewisse, wenn auch noch so kurze Zeit auf dieselbe einwirken. Eine Kraft, deren Wirkungsdauer Null ist, bringt auch keine Bewegung hervor. Demnach gibt es streng genommen keine Momentankräfte in diesem Sinne. Vielfach ist die Einwirkung einer Kraft jedoch nur augenblicklich, von außerordentlich kurzer Dauer, und in diesem Sinne muß der Begriff, den wir mit Momentankraft bezeichnen, aufgefaßt werden.

Um nun ein Maß für Momentankräfte zu finden, nehmen wir folgenden Grundsatz an:

Wenn auf gleiche Massen Momentankräfte wirken, so verhalten sich die Kräfte wie die Geschwindigkeiten, welche sie denselben ertheilen.

Sind demnach P, P' die Kräfte, V, V' die Geschwindigkeiten, die sie gleichen Massen ertheilen, so hat man die Proportion:

$$P:P' = V:V' \quad \ldots \; 1.$$

Nehmen wir an, eine Kraft ertheile einer Masse eine gewisse Geschwindigkeit, so wird, um der doppelten Masse dieselbe Geschwindigkeit zu ertheilen, auch die doppelte Kraft nöthig sein; denn die doppelte

Masse können wir zerlegt denken in zwei gleiche Massen, wovon offenbar jede durch die einfache Kraft getrieben werden muß, um dieselbe Geschwindigkeit zu erlangen. Haben wir eine dreifache Masse, so können wir sie in drei gleiche Massen zerlegt denken, und an jeder derselben die einfache Kraft wirksam, welche ihr dieselbe Geschwindigkeit ertheilt. Daher wird eine doppelte Masse die doppelte Kraft, eine dreifache Masse die dreifache Kraft nöthig haben, um dieselbe Geschwindigkeit zu erhalten, wie die einfache Masse durch die einfache Kraft. Eine n fache Masse wird folglich eine n fache Kraft erfordern. Sind daher M, M′ die Massen, P, P′ die Kräfte, welche ihnen die gleiche Geschwindigkeit ertheilen, so folgt

$$P:P' = M:M' \quad . \; . \; . \; 2$$

d. h. wenn Momentankräfte ungleichen Massen gleiche Geschwindigkeit ertheilen, so verhalten sie sich wie die Massen.

Sei nun P″ die Kraft, welche der Masse M die Geschwindigkeit V′ ertheilen würde, so hat man nach dem ersten Satze:

$$P:P'' = V:V'$$

und nach dem zweiten: $P'':P' = M:M'$

also: $P:P' = MV:M'V' \quad . \; . \; . \; 3$

d. h. wenn Momentankräfte ungleichen Massen ungleiche Geschwindigkeiten ertheilen, so verhalten sie sich wie die Producte aus den Massen in die Geschwindigkeiten.

Wenn man nun diejenige Momentankraft als Einheit annimmt, welche der Masse = 1 eine Geschwindigkeit = 1 ertheilt, so wird für M′ = 1, V′ = 1 auch P′ = 1, daher aus 3

$$P:1 = MV:1$$

oder

$$P = MV \quad . \; . \; . \; 4$$

d. h. die Intensität einer Momentankraft wird ausgedrückt durch das Product aus der Masse in ihre Geschwindigkeit.

Dieses Product MV heißt man die Größe der Bewegung.

§. 200.

Maß für constante Kräfte. Wenn eine constante Kraft auf eine träge ruhende Masse einwirkt, so wird sie in jeder Zeiteinheit die gleiche Geschwindigkeitszunahme oder Beschleunigung bewirken. Ist die Intensität, mit welcher eine Kraft die gleiche Masse drückt oder zieht, die doppelte, so wird sie auch die doppelte Geschwindigkeitszunahme hervorbringen; ist sie dreimal so groß, so wird sie die dreifache Zunahme erzeugen u. s. f. Wir können also den Satz folgern: Wenn constante Kräfte auf gleiche Massen wirken, so verhalten sie sich wie die Beschleunigungen, welche sie den Massen ertheilen. Sind P, P′ die Kräfte, G, G′ die Beschleunigungen, die sie der gleichen Masse ertheilen, so hat man die Proportion:

$$P:P' = G:G'.$$

Soll der doppelten Masse die doppelte Geschwindigkeitszunahme ertheilt werden wie der einfachen Masse, so muß offenbar die dazu nöthige Kraft auch doppelt so groß sein, wie die für die einfache Masse. Denn zerlegen wir die doppelte Masse in zwei gleiche Theile oder zwei einfache Massen, so muß auf jede die einfache Kraft zur Hervorbringung der Geschwindigkeitszunahme einwirken. Auf die dreifache Masse muß ebenso eine dreifache Kraft einwirken u. s. f. Es verhalten sich also die Kräfte wie die Massen, welchen sie die gleiche Beschleunigung ertheilen. Sind demnach M, M′ die Massen, P, P′ die Kräfte, so folgt:

$$P:P' = M:M' \quad . \; . \; . \; 2.$$

Die Kraft P″ ertheile der Masse M eine Beschleunigung G′, so hat man mit Berücksichtigung der beiden obigen Sätze:

$$P:P'' = G:G'$$
$$P'':P' = M:M'$$

also:

$$P:P' = MG:M'G' \quad . \; . \; . \; 3$$

d. h. die constant wirkenden Kräfte verhalten sich wie die Producte aus den bewegten Massen in die Beschleunigungen.

Setzt man $P' = 1$, $M' = 1$, $G' = 1$, so folgt

$$P = MG \quad . \; . \; . \; 4$$

d. h. das Maß einer constanten Kraft ist gleich dem Producte aus der Masse in ihre Beschleunigung.

Aus 4 folgt:

$$G = \frac{P}{M} \quad . \; . \; . \; 5$$

d. h. Die Beschleunigung ist gleich der constanten Kraft dividirt durch die bewegte Masse.

Es ist aber auch, wenn nach der Zeit t der Körper die Geschwindigkeit v erreicht hat: $G = \frac{v}{t}$, somit ist nach Gl. 4

$$P = M.\frac{v}{t} \quad . \; . \; . \; 6.$$

$$v = \frac{P}{M}.t \quad . \; . \; . \; 7.$$

§. 201.

Zur Bestimmung der Beschleunigung bewegter Massen gibt uns die Schwerkraft wieder das geeignetste Mittel an die Hand. Die bewegende Kraft bei einem frei fallenden Körper ist die Schwerkraft, die Intensität derselben wird aber durch das Gewicht des fallenden Körpers gemessen, daher ist für frei fallende Körper ihr Gewicht die bewegende oder beschleunigende Kraft. Die correspondirende Geschwindigkeitsänderung für die Zeiteinheit ist also die Beschleunigung g der Schwere. Bezeichnet Q das absolute Gewicht eines Körpers, also die

bewegende Kraft seiner Masse M und setzt man G = g, so erhält man aus 4 des vorigen §

$$Q = Mg \ldots 1$$

d. h. das absolute Gewicht eines Körpers ist gleich dem Product aus seiner Masse in die Beschleunigung der Schwere.

Ferner ergibt sich

$$M = \frac{Q}{g} \ldots 2$$

d. h. die Masse eines Körpers ist gleich seinem absoluten Gewichte dividirt durch die Beschleunigung der Schwere.

Sind M, M′ die Massen zweier Körper, Q, Q′ ihre absoluten Gewichte, so hat man die Proportion:

$$M : M' = \frac{Q}{g} : \frac{Q'}{g} = Q : Q' \ldots 3$$

d. h. die Massen verhalten sich an demselben Orte wie die absoluten Gewichte.

Für die Masseneinheit M = 1 wird nach Gl. (1) Q = g. Es wird also hiernach diejenige Masse als Einheit angenommen, deren Gewicht gleich 9,808 Kilogr. ist, oder für badisches Maß und Gewicht 32,696 Pfund.

Führt man den Werth von M Gl. 2 in Gl. 5 des vorigen Paragraphen ein, so erhält man die Beschleunigung

$$G = \frac{P}{Q} \cdot g \ldots 4$$

d. h. man findet die Beschleunigung einer in Gewichtseinheiten gegebenen constanten Kraft, welche auf eine durch ihr Gewicht gegebenen Masse einwirkt, wenn man die Kraft durch das Gewicht der Masse dividirt und den Quotienten mit der Beschleunigung der Schwere multiplicirt.

Man nennt auch P die Ueberwucht.

§. 202.

Gleichförmig veränderte Bewegung fester Körper. Nachdem wir nun die Beschleunigung bestimmt haben, so können wir die gleichförmig beschleunigte und verzögerte Bewegung jedes festen Körpers ermitteln, welcher durch eine Kraft getrieben wird, die wir im Schwerpunkt desselben wirksam annehmen dürfen. Wir haben sofort nur den in Gleichung 4 des vorigen Paragraphen gefundenen Werth für G in die früher entwickelten allgemeinen Gleichungen für gleichförmig beschleunigte und verzögerte Bewegung eines Punktes zu substituiren. Behalten wir die frühere Bezeichnung bei, so erhalten wir folgende Gleichungen für die Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit:

$$v = \frac{P}{Q} g \,.\, t \;\ldots\; 1$$

$$s = \frac{1}{2} \frac{P}{Q} g \,.\, t^2 \;\ldots\; 2$$

$$v^2 = \frac{2P}{Q} g \,.\, s \;\ldots\; 3$$

$$P = \frac{Q \,.\, v}{gt} \;\ldots\ldots\; 4$$

$$P = \frac{Q \,.\, v^2}{2gs} \;\ldots\ldots\; 5.$$

Besitzt der Körper, auf welchen die constante Kraft einwirkt, schon eine Anfangsgeschwindigkeit V, so hat man für beschleunigte Bewegung:

$$v = V + \frac{P}{Q} gt \;\ldots\; 6$$

$$s = Vt + \frac{1}{2} \frac{P}{Q} g \,.\, t^2 \;\ldots\; 7$$

$$v^2 = V^2 + \frac{2P}{Q} gs \;\ldots\; 8$$

und für verzögerte Bewegung:

$$v = V - \frac{P}{Q} gt \;\ldots\; 8$$

$$s = Vt - \frac{1}{2} \frac{P}{Q} gt^2 \;\ldots\; 9$$

$$v^2 = V^2 - \frac{2P}{Q} g \,.\, s \;\ldots\; 10.$$

Durch obige Formeln können nun alle Fragen über die freie geradlinige gleichförmig veränderte Bewegung der festen Körper gelöst werden. Zur Uebung und nähern Erläuterung mögen folgende Beispiele dienen.

Aufg. 1. Auf einen Körper von 200 Kilogramm Gewicht wirkt eine constante Kraft von 10 Kilogr. 25 Secunden lang ein; welche Geschwindigkeit hat er nach dieser Zeit?

Aufl. Der Körper geht vom Zustand der Ruhe aus, daher ist nach Gl. 1 $P = 10$; $Q = 200$; $g = 9{,}808$; $t = 25$; somit

$$v = \frac{10}{200} \,.\, 9{,}808 \,.\, 25 = 12{,}26 \text{ Meter}.$$

Aufg. 2. Auf einer horizontalen Ebene liegt ein Körper vom Gewichte $= Q$; an demselben wirkt eine constante Kraft $= K$; der Reibungscoefficient sei $= \mu$; welche Geschwindigkeit wird der Körper nach t Secunden erlangt und welchen Weg zurückgelegt haben?

Aufl. Die Reibung ist $= \mu Q$; diese müssen wir als eine constante, der Kraft K entgegenwirkende Kraft betrachten, somit ist die Kraft, welche zur Bewegung der Masse noch übrig bleibt, oder die

Ueberwucht $P = K - \mu Q$. Setzt man diesen Werth in Gl. 1 und 2, so erhält man

$$v = \frac{K - \mu Q}{Q} g \,.\, t; \; s = \frac{K - \mu Q}{2Q} gt^2.$$

Aufg. 3. Ein Körper von 150 Kilogr. Gewicht hat eine Geschwindigkeit von 2 Meter. Nun wirkt nach der Bewegungsrichtung auf denselben eine Kraft von 12 Kilogr. 15 Secunden lang ein; welche Geschwindigkeit besitzt er alsdann?

Aufl. Es ist $V = 2$; $P = 12$; $Q = 150$; $t = 15$; daher nach Gl. 6 $v = 2 + \frac{12}{150} \,.\, 9{,}808 \,.\, 15 = 13{,}77$ Meter.

Aufg. 4. Auf einer horizontalen Ebene bewegt sich ein Körper von 64 Pfund Gewicht. In einem gewissen Augenblick hat er die Geschwindigkeit von 48 Fuß. Der Reibungscoefficient ist 0,2. Man soll berechnen, nach welcher Zeit und wo er noch eine Geschwindigkeit von 15 Fuß hat; ferner wann und wo er liegen bleibt?

Aufl. Da die Reibung diejenige Kraft ist, welche der Bewegung beständig entgegenwirkt und sie zu vernichten strebt, so muß diese zuerst bestimmt werden. Diese ist $64 \,.\, 0{,}2 = 12{,}8$ Pfund. Daher ist nach Gl. 10 $P = 12{,}8$; $Q = 64$; $v = 15$; $V = 48$, und weil badisches Maß und Gewicht vorausgesetzt ist, $g = 32{,}696$. Setzt man diese Werthe in genannte Gleichung, so erhält man:

$$15^2 = 48^2 - 2 \,.\, \frac{12{,}8}{64} \,.\, 32{,}696 \,.\, s$$

und daraus ergibt sich der Weg, den der Körper zurücklegt, bis er noch die Geschwindigkeit von 15 Fuß hat: $s = 158{,}964$ Fuß. Substituirt man jene Werthe in Gl. 9, so ergibt sich die bis dahin verflossene Zeit $t = 5{,}046$ Secunden.

Um die Zeit zu finden, nach welcher der Körper liegen bleibt, setze man in Gl. 9 $v = 0$, alsdann findet man $t = 7{,}34$ Secunden. Der bis dahin zurückgelegte Weg wird gefunden, wenn man in Gl. 10, $v = 0$ setzt. Man erhält dann $s = 176{,}18$ Fuß.

Aufg. 5. Welche constante Kraft ist erforderlich, um einen Frachtwagen von 4000 Pfund Gewicht auf horizontaler glatter Bahn aus dem Zustand der Ruhe in eine Geschwindigkeit von 15 Fuß innerhalb einer Minute zu versetzen?

Aufl. Es ist $Q = 4000$; $v = 15$; $t = 60$; daher nach Gl. 4

$$P = \frac{4000 \,.\, 15}{32{,}696 \,.\, 60} = 30{,}6 \text{ Pfd.}$$

Aufg. 6. Ueber eine immaterielle Rolle, die sich um eine horizontale Axe bewegt, ist ein gewichtsloser, vollkommen biegsamer Faden gelegt. Am einen Ende hängt eine schwere Masse von 60 Pfd., am andern 40 Pfd. Beide Massen werden vom Zustand der Ruhe aus der Wirkung der Schwere überlassen; man soll die Geschwindigkeit v berechnen, mit welcher sich die Masse 60 nach Verfluß der Zeit t abwärts und die Masse 40 aufwärts bewegt?

Aufl. Die beiden Gewichte haben gleiche Hebelsarme, folglich sind ihre statischen Momente ungleich und es muß sich die Masse 60 abwärts bewegen. 40 Pfd. auf der einen Seite halten den 40 Pfd. auf der andern das Gleichgewicht. Es wirken daher als bewegende Kraft 60 — 40 = 20 Pfd. Daher ist die Ueberwucht P = 20. Diese Kraft muß die Massen 60 + 40 = 100 Pfd. bewegen; also ist Q = 100 Pfd. Setzt man diese Werthe in Gl. 1, so erhält man:

$$v = \frac{20}{100} . 32{,}696 . t = 6{,}539 \text{ t Fuß.}$$

Aufg. 7. Es werde angenommen, die Masse 40 habe in einem gewissen Augenblick eine Geschwindigkeit von 50 Fuß abwärts, also die Masse 60 dieselbe aufwärts. Man soll berechnen, wann die Masse 40 um 80 Fuß weiter unten, die Masse 60 um ebensoviel weiter oben ist?

Aufl. Die Bewegung ist hier eine verzögerte. Es ist V = 50; s = 80; P = 20; Q = 100; daher nach Gl. 10:

$$v^2 = 50^2 - \frac{2.20}{100} . 32{,}696 . 80; \; v = \pm 38{,}12 \text{ Fuß.}$$

Diese Geschwindigkeit hat der Körper, wann er 80 Fuß weiter unten ist als vom gedachten Augenblicke an. Zur Bestimmung der Zeit entwickle man t aus Gl. 6, so erhält man: $t = \frac{(V-v)\,Q}{P\,.\,g}$.

Nimmt man nun $v = +38{,}12$, so ist $t = \frac{(50-38{,}12)\,100}{20\,.\,32{,}696} = 1{,}8$ Secunden.

Nimmt man aber $v = -38{,}12$, so ist $t = \frac{(50+38{,}12)\,100}{20\,.\,32{,}696} = 13{,}5$ Secunden.

Man sieht also hieraus, daß der Körper 40 zweimal an den Ort kommt, wo er 80 Fuß tiefer ist als anfänglich, nämlich im Hinuntergehen und dann wieder im Hinaufgehen.

Aufg. 8. Man soll die Aufgabe 6 mit Rücksicht auf die Reibung an den Zapfen der Rolle berechnen. Der Radius der Rolle sei = 0,5 Fuß; der des Zapfens = 0,05; der Reibungscoefficient = 0,1.

Aufl. Die Reibung ist 100 . 0,1 = 10 Pfund. Das Moment derselben = 10.0,05. Die an den Umfang der Rolle reducirte Reibung ist $= \frac{10\,.\,0{,}05}{0{,}5} = 1$ Pfd. Daher die Ueberwucht P = 60 — 40 — 1 = 19 Pfd. Somit $v = \frac{19}{100} . 32{,}696 . t = 6{,}212$ t.

Von der Wirkung oder mechanischen Arbeit der Kräfte. Lebendige Kraft.

§. 203.

Wirkung oder Arbeit einer constanten Kraft, wenn der Angriffspunkt in der Kraftrichtung sich bewegt.

Jede Kraft hat das Bestreben eine Arbeit zu verrichten, eine mechanische Wirkung hervorzubringen. Es wird aber nur dann die Kraft eine wirkliche Arbeit verrichten, wenn sie im Stande ist ihren Angriffspunkt zu bewegen oder überhaupt Bewegung zu erzeugen. Wenn eine noch so große Kraft auf einen Körper wirkt und sie kann denselben nicht bewegen, so leistet sie keine Arbeit. Zur Hervorbringung einer Arbeit ist also immer nöthig, daß die Kraft den Körper, worauf sie wirkt, bewege oder einen Widerstand auf eine Strecke Weges überwinde. So wird eine Arbeit verrichtet, wenn eine Last gehoben, ein Schlitten auf einer Straße hingeführt wird. Ebenso beim Hobeln, Feilen, Sägen, Meißeln, wo die Kraft das Werkzeug durch einen gewissen Weg hin bewegt und so einen Widerstand diese Wegeslänge hindurch überwindet. Bei der Größe der geleisteten Arbeit kommt es nicht allein auf die Intensität der wirkenden Kraft an, sondern auch wesentlich auf die Länge des Weges, welchen ihr Angriffspunkt durchläuft. Auch kommt die Zeit hier nicht in Betracht. Denn eine gewisse Arbeit kann verrichtet werden durch eine kleinere und auch durch eine größere Kraft, ob dieß nun in einem größern oder kleinern Zeitraum geschieht, ist für die Größe der geleisteten Arbeit ganz gleichgültig.

Wenn nun eine Kraft mit stets gleich bleibender Intensität wirkt und dabei ihren Angriffspunkt in ihrer Richtung fortbewegt, so wird die Größe ihrer Wirkung oder Arbeit ausgedrückt durch das Product aus der Kraft in den von ihrem Angriffspunkt zurückgelegten Weg. Bezeichnet demnach P die Kraft, S den Weg, W die Wirkung oder Arbeit, so ist

$$W = P . S.$$

Dieses Product heißt man die Wirkung, Wirkungsgröße, mechanische Arbeit oder auch Arbeitsgröße der Kraft P. Ganz ungleich große Kräfte können gleiche Arbeit verrichten, wenn nur ihre Wege sich umgekehrt wie ihre Intensitäten verhalten. Wirkt eine Kraft von 500 Kilogr. auf die Länge von 10 Meter, so leistet sie ganz dasselbe wie eine Kraft von 10 Kilogramm, die einen Weg von 500 Meter zurücklegt. Zeit, Art der Bewegung, Größe der Geschwindigkeit kommen bei Bestimmung der Arbeitsgröße einer Kraft nicht in Betracht.

Um nun die Arbeitsgröße messen zu können, müssen wir ein geeignetes Maß als Einheit dazu wählen. Das Product besteht aus zwei Factoren, der eine bezeichnet ein Gewicht, der andere eine Länge. Das naturgemäßeste wird also sein, wenn wir ein Product zum Maße nehmen, dessen einer Factor die Gewichtseinheit, der andere die Längeneinheit darstellt. Für Kilogramm und Meter wird also diejenige Arbeitsgröße als Einheit oder als Maß gelten, welche geleistet wird, wenn ein Kilogramm auf die Länge von einem Meter den Angriffspunkt bewegt. Sind Pfund und Fuß die Einheiten, so wird die Wirkungs- oder Arbeitseinheit gemessen durch die Größe, wenn ein Pfund auf die Länge von einem Fuß thätig ist. Bei Messung sehr bedeutender

Wirkungen nimmt man auch wohl zu Einheiten den Centner und die Stunde, die Tonne und die Meile.

Damit man aber immer weiß, welche Maß- und Gewichtseinheiten zu Grunde gelegt sind, bildet man ein Wort, welches beide Einheiten zugleich ausdrückt und schreibt rechts oben an das Product die Anfangsbuchstaben der Gewichts- und Maßeinheit. Für Kilogramm und Meter heißt nun die Wirkungseinheit „Kilogramm-Meter," für Pfund und Fuße „Fußpfund." Wird ein Druck von 6 Kilogramm auf die Länge von 20 Meter ausgeübt, so ist die Wirkungsgröße $W = 6 . 20 = 120$ K.-M. gleich 120 Kilogramm-Meter. Wirken 15 Pfund auf die Länge von 100 Fuß, so ist $W = 15 . 100 = 1500$ Fuß-Pfd. gleich 1500 Fuß-Pfund. Man hat also allgemein für Kilogramm und Meter $W = P . S$ K.-M.

Für Fuße und Pfund

$$W = P . S \text{ Fuß-Pfd.}$$

Da dieses Product aus zwei Factoren besteht, so läßt sich die Wirkungsgröße auch geometrisch durch den Inhalt eines Rechteckes, Fig. 151, ausdrücken, dessen eine Seite $AB = S$ den Weg und dessen andere $AD = P$ die Kraft bezeichnet.

Beispiel. Ein Pferd zieht mit 60 Kilogr. einen Lastwagen 1000 Meter weit fort; welches ist die geleistete Arbeit des Pferdes?

Antwort. $W = 60 . 1000 = 6000$ K.-M.

§. 204.

Arbeitsgröße einer constanten Kraft, deren Angriffspunkt einen Weg zurücklegt, welcher mit der Kraftrichtung einen Winkel bildet. Es sei, Fig. 164, AP die Richtung der Kraft P, AB der vom Angriffspunkt A wirklich zurückgelegte Weg, $\sphericalangle BAC = \alpha$. Zerlegt man die Kraft P in zwei Seitenkräfte nach der Richtung AD und rechtwinkelig darauf, so wird die letztere $P \sin \alpha$ durch den Widerstand der festen Bahn AD aufgehoben und ihre Wirkung ist daher Null. Die erstere $P \cos \alpha$ bewirkt allein die Bewegung des Punktes. Es ist daher die Arbeitsgröße:

$$W = P \cos . AB.$$

Fällt man aus B das Perpendikel BC auf die Kraftrichtung, so ist AC die Projection des wirklichen Weges AB und es ist $AC = AB . \cos \alpha$. Setzt man diesen Werth in obige Gleichung, so erhält man:

$$W = P . AC.$$

Die Arbeitsgröße ist also gleich dem Producte aus der Kraft in die Projection des vom Angriffspunkte zurückgelegten Weges auf die Kraftrichtung.

Das Product $P . AC$ haben wir früher schon unter dem Namen virtuelles Moment kennen gelernt. Es sind also die virtuellen Momente der Zahl nach nichts anders als die Arbeitsgrößen der Kräfte. Beide sind nur insofern verschieden, als man sich bei ersteren nur eine Bewegung denkt, bei letztern aber eine Bewegung wirklich stattgefunden hat.

§. 205.

Arbeitsgröße einer Mittelkraft. Es seien P′ P″ zwei auf den Punkt A wirkende Kräfte, R ihre Mittelkraft. Der Punkt, Fig. 165, werde in der Richtung AX von A nach B bewegt. Es seien ferner α', α'', α die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte P′, P″, R mit der Bewegungsrichtung bilden, und BC, BE, BD die vom Punkt B auf die Kraftrichtungen gefällten Perpendikel; demnach sind $AC = s'$, $AE = s''$, $AD = r$ die Projectionen des zurückgelegten Weges auf die Kraftrichtungen. Man zerlege nun die Kräfte in zwei rechtwinkelige Seitenkräfte nach der Bewegungsrichtung AX, die zugleich die Abscissenaxe sei, und nach der darauf rechtwinkeligen Ordinatenaxe AY. Die Seitenkräfte nach letzterer Axe haben auf die Bewegung des Punktes nach AB keinen Einfluß, ihre Wirkung ist daher Null. Die Seitenkräfte nach der Richtung AX sind $R \cos \alpha$, $P' \cos \alpha'$, $P'' \cos \alpha''$ und nach statischen Lehren ist bekanntlich

$$R \cos \alpha = P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha''.$$

Multiplicirt man nun mit AB, so hat man:

$$R.AB \cos \alpha = P'.AB \cos \alpha' + P''.AB \cos \alpha''.$$

Nun ist aber $AB \cos \alpha = r$, $AB \cos \alpha' = s'$, $AB \cos \alpha''$ s'', daher ist

$$Rr = P's' + P''s''.$$

Nach dem vorigen § sind diese Producte die Arbeitsgrößen der betreffenden Kräfte. Es folgt also:

Die Arbeitsgröße der Mittelkraft ist gleich der Summe der Arbeitsgrößen der Seitenkräfte.

Dieser Satz läßt sich auf gleiche Weise für eine beliebige Anzahl Kräfte ableiten und man wird erhalten allgemein:

$$Rr = \Sigma Ps.$$

§. 206.

Arbeitsgröße einer veränderlichen Kraft. Ist die Intensität einer Kraft veränderlich und schreitet der Angriffspunkt in einer geraden Linie fort, so kann man die Arbeitsgröße auf folgende Weise berechnen. Man trage auf einer geraden Linie, die als Abscissenaxe angenommen wird, die Länge des vom Angriffspunkt zurückgelegten Weges ab und nehme die den verschiedenen Wegeslängen entsprechenden Kräfte als Ordinaten, so erhält man eine Figur, deren Flächeninhalt die Arbeitsgröße der veränderlichen Kraft ausdrückt. Es sei, Fig. 166, die Wegeslänge AB und AC die Intensität der Kraft am Anfange BD die am Ende, den Punkten E, G entsprechen die Intensitäten EF, GH u. s. w. Es drückt nun der Inhalt des krummlinigen Paralleltrapezes die von A bis E geleistete Arbeit aus. Ebenso drückt EGHF die von E bis G verrichtete Arbeit aus. Die Summe dieser Flächenelemente gibt den Inhalt der ganzen Figur, also auch die Summe der einzelnen Elementararbeitsgrößen die ganze Arbeitsgröße.

Den Inhalt der ganzen Figur findet man aber durch Anwendung der Simpson'schen Formel. Man theile den Weg AB in eine hinlängliche Anzahl gleicher Theile 2n, jeden gleich s, errichte in den einzelnen Punkten die den Kräften entsprechenden Ordinaten und bezeichne dieselben der Reihe nach mit P_1, P_2, $P_3 \ldots P_{2n+1}$, so erhält man den Flächeninhalt der Figur und somit die Arbeitsgröße:

$$W = \frac{s}{3} \{P_1 + P_{2n+1} + 4 (P_2 + P_4 + \ldots + P_{2n}) + 2 (P_3 + P_5 + \ldots + P_{2n-1})\}.$$

Die mittlere Kraft, d. h. diejenige, welche auf dieselbe Wegeslänge AB constant wirkend, die gleiche Arbeitsgröße W hervorbringen würde, findet man, wenn man die Arbeitsgröße durch die Wegeslänge dividirt. Es sei P die mittlere Kraft und der Weg AB = S, so ist

$$P = \frac{W}{S}.$$

§. 207.

Bestimmung der Arbeitsgröße, wenn Intensität und Richtung der Kraft veränderlich sind. Nehmen wir den allgemeinsten Fall an, wo der Angriffspunkt eine Kurve ABC... G, Fig. 167, beschreibt und Intensität und Richtung der Kraft sich fortwährend ändern. Man theile die Kurve in sehr kleine Theile AB, BC, CD..., so daß man diese als gerade Linien betrachten und annehmen kann, die Kraft bleibe, während ihr Angriffspunkt ein Kurvenelement durchläuft, constant und ihre Richtung parallel mit sich selbst. Es seien P′, P″, P‴... die Intensitäten der veränderlichen Kraft in den Punkten A, B, C, D... Man fälle nun aus den Punkten B, C, D, E... auf die Kraftrichtungen die Perpendikel Ba, Cb, Dc... Dann sind unter der gemachten Voraussetzung die Producte P′. Aa, P″. Bb, P‴. Cc... die Elementarbeiten der Kraft. Die Summe der Elementararbeiten gibt die Totalarbeit. Daher erhält man:

$$W = P'. Aa + P''. Bb + P'''. Cc + \ldots$$

Trägt man nun auf der geraden Linie AB, Fig. 168, die Stücke Aa, ab, bc... gleich den Linien Aa, Bb, Cc... ab und errichtet in den Punkten A, a, b... die den Kräften P′, P″, P‴... entsprechenden Ordinaten auf, so gibt der Flächeninhalt der Figur ABDC die verlangte Arbeitsgröße.

§. 208.

Arbeitsgröße beim Heben eines Körpers. Wird ein Körper vertical aufwärts gehoben, so ist offenbar die Arbeit der hebenden Kraft gleich dem Gewichte des Körpers multiplicirt mit der Höhe, auf die er gehoben wird. Ist daher Q das Gewicht, H die Höhe, so ist

$$W = Q . H.$$

In der Einfachheit dieses Ausdrucks liegt auch der Grund, warum man denselben zur Vergleichung aller Arbeitsgrößen gewählt hat. Man gibt dabei an wie viele Gewichtseinheiten auf eine gewisse Höhe

gehoben der Arbeit gleich sind. Ist eine solche z. B. 36 K.-M., so sagt man 36 Kilogr. einen Meter hoch, oder 1 Kilogramm 36 Meter hoch gehoben. Hängt z. B. ein Gewicht Q an einer Schnur, welche über eine Rolle gelegt ist, und wirkt am andern Ende der Schnur nach einer beliebigen Richtung eine Kraft P, die den Weg S zurücklegt, während jenes Gewicht auf die Höhe H gehoben wird, so ist doch klar, daß stattfindet

$$W = PS = Q \, . \, H.$$

Wird der Körper nicht in verticaler Richtung, sondern etwa so gehoben, daß alle Punkte desselben congruente krumme Linien beschreiben, so sei ADG, Fig. 169, der Weg eines seiner Punkte vom Gewichte q'. Man theile nun die krumme Linie in sehr viele kleine Theile AB, BC, CD..., ziehe durch die Theilungspunkte Perpendikel auf die Horizontale AH und mit dieser die Parallelen Ba, Cb, Dc..., dann sind Aa, Bb, Cc... die Projectionen der Kurvenelemente auf die Kraftrichtungen. Die bei dieser Hebung verrichteten Elementararbeiten sind also $q' . Aa$, $q' . Bb$, $q' . Cc$... Die Summe dieser gibt somit die Totalarbeit, welche bei der Hebung des Gewichtes q' von A bis G verrichtet wird, nämlich:

$$q' . Aa + q' . Bb + q' . Cc + \ldots = q' (Aa + Bb + Cc + \ldots).$$

Es ist aber die in den Klammern befindliche Größe nichts anders, als der verticale Abstand des Punktes G von A, also die ganze Förderungshöhe H. Demnach ist die Arbeit bei Hebung des Elementes gleich $q'.H$. Zerlegt man nun den ganzen Körper in seine Elemente, deren Gewichte q', q'', q'''... seien, so ist die gesammte Arbeit

$$W = q' . H + q'' H + q''' H + \ldots = (q' + q'' + q''' + \ldots) H.$$

Es ist aber $q' + q'' + q''' + \ldots = Q$, daher

$$W = Q \, . \, H.$$

Erfolgt die Hebung in der Art, daß die einzelnen Punkte des Körpers beliebige, nicht congruente Kurven beschreiben und nicht stets alle gleich hoch gehoben werden, so seien z', z'', z''' ... die Abstände derselben von einer gewissen Ebene vor Beginn der Erhebung Z', Z'', Z''' ... die Abstände von derselben Ebene nach der Erhebung. Alsdann sind die Arbeitsgrößen für die Erhebungen der einzelnen Punkte $q' (Z' - z')$; $q'' (Z'' - z'')$; $q''' (Z''' - z''')$ u. s. w.

Daher die Arbeitsgröße für die Erhebung des ganzen Körpers:

$$W = q' (Z' - z') + q'' (Z'' - z'') + q''' (Z''' - z''') + \ldots$$

$$W = (q'Z' + q''Z'' + q'''Z''' + \ldots) - (q'z' + q''z'' + q'''z''' + \ldots)$$

Bezeichnet nun H' den Abstand des Schwerpunktes des ganzen Körpers von gedachter Ebene nach der Erhebung, und h' den Abstand desselben vor der Erhebung, so hat man nach den Lehren der Statik:

$$Q.H' = q'Z' + q''Z'' + q'''Z''' + \ldots$$

$$Q.h' = q'z' + q''z'' + p'''z''' + \ldots$$

daher

$$W = Q.H' - Q.h' = Q.(H' - h').$$

Setzt man $H' - h' = H$, so folgt:

$$W = Q.H.$$

Hieraus ergibt sich der ganz allgemeine Satz:

Die Arbeitsgröße für das Erheben eines Körpers ist gleich dem Gewichte des Körpers multiplicirt mit der verticalen Höhe, auf welche der Schwerpunkt desselben gehoben wird.

Dieser Satz gilt ganz allgemein auch dann noch, wenn während der Erhebung die einzelnen Punkte des Körpers ihre Lage gegenseitig ändern. Die Wirkungen der Kräfte, welche die Formänderung hervorbringen, haben hierauf keinen Einfluß. Ebenso ist der Satz richtig für die Erhebung eines Systems von Körpern, wo dann unter Q die Summe der Gewichte sämmtlicher Körper, und unter H der verticale Abstand des Schwerpunktes des ganzen Systems vor und nach der Erhebung zu verstehen ist.

§. 209.

Effect einer Kraft. Ist eine Kraft mit stets gleicher Intensität und gleicher Geschwindigkeit thätig, so wird sie in gleichen Zeiten auch gleiche Arbeitsgrößen erzeugen. **Man nennt nun die Arbeitsgröße, welche in einer Secunde erzeugt wird, den Effect einer Kraft.** Ist demnach P die constante Kraft, v die Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes nach ihrer Richtung, E der Effect, so hat man die Gleichung:

$$E = Pv \ . \ . \ . \ 1.$$

Wirkt die Kraft t Secunden lang, so ist die während dieser Zeit erzeugte Arbeitsgröße

$$W = Pv.t = E.t \ . \ . \ . \ 2$$

und daraus

$$E = \frac{W}{t} \ . \ . \ . \ 3.$$

Zur Messung bedeutender Wirkungen nimmt man statt Kilogramm-Meter oder Fußpfund, namentlich bei Maschinen, eine größere Wirkungseinheit an, um den Effect derselben in kleineren Zahlen zu erhalten. Man hat gefunden, daß ein starkes Pferd bei 1 Meter Geschwindigkeit und 8stündiger Arbeitszeit täglich eine Kraft von 75 Kilgr. äußern kann. Es wäre also der Effect eines solchen Pferdes 75 Kilogramm-Meter. Diese Arbeitsgröße nimmt man alsdann als Einheit an, und nennt sie **Pferdekraft** oder auch **Maschinenpferd**. Für badisches Maß und Gewicht beträgt eine Pferdekraft 500 Fußpfund, für englisches 550 Fußpfund.

Ist nun N die Anzahl Pferdekräfte, so hat man auch:

$$E = 75 \ N \ . \ . \ . \ 4$$

$$N = \frac{E}{75} \ . \ . \ . \ 5.$$

Für eine veränderliche Kraft, welche t Secunden hindurch thätig ist, erhält man den Effect:

$$E = \frac{W}{t} \ . \ . \ . \ 6.$$

Wenn S den in dieser Zeit zurückgelegten Weg bedeutet, so ist der mittlere Werth der Kraft

$$P = \frac{W}{S} \ldots 7.$$

Aus dieser und der vorigen Gleichung ergibt sich $Et = PS$, also $E = P \cdot \frac{S}{t}$. Es ist aber $\frac{S}{t}$ der mittlere Weg für die Secunde oder die mittlere Geschwindigkeit. Setzt man $\frac{S}{t} = v'$, so folgt:

$$E = P \cdot v' \ldots 8.$$

Der mittlere Effect einer veränderlichen Kraft wird also gefunden, wenn man die mittlere Kraft mit der mittlern Geschwindigkeit multiplicirt.

Aufg. 1. Ein Schlitten, der mit seiner Last 300 Kilgr. wiegt, wird auf horizontaler Straße 400 Meter weit fortbewegt. Der Reibungscoefficient sei 0,3. Welches ist die verrichtete Arbeitsgröße?

Aufl. Die Reibung, welche nur allein zu überwinden ist, bildet hier den constanten Widerstand. Diese ist 0,3.300; daher die Arbeitsgröße

$$W = 0{,}3 \cdot 300 \cdot 400 = 36000 \text{ Kilogr.-Meter.}$$

Wird dieser Weg in 6 Minuten zurückgelegt, so ist der Effect der bewegenden Kraft $E = \frac{W}{t} = \frac{36000}{360} = 100$ Kilogr.-Meter $= \frac{100}{75} = 1\frac{1}{3}$ Pferdekräfte.

Aufg. 2. Welche Arbeitsgröße ist erforderlich, um 6 Kubikmeter Wasser 10 Mtr. hoch zu heben?

Aufl. 6 Kubikmeter sind 6000 Kilgr. Daher ist

$$W = 6000 \cdot 10 = 60000 \text{ Kilogr.-Meter.}$$

Welches ist der Effect der hebenden Kraft, wenn die Hebung innerhalb 3 Minuten 20 Secunden geschieht?

Antw. $E = \frac{W}{t} = \frac{60000}{200} = 300$ Kilogr.-Meter $= \frac{300}{75} = 4$ Pferdekräfte. Ist die Zeit der Hebung 6 M. 40 Sec., so ist der Effect $E = \frac{60000}{400} = 150$ Kilogr.-Meter $= \frac{150}{75} = 2$ Pferdekräfte.

§. 210.

Wirkung der Schwerkraft. Wenn ein Körper vom Gewichte Q auf die Höhe h gehoben wird, so ist die verrichtete Arbeit gleich Qh. Es wird dabei gewissermaßen eine Kraft in dem Körper angesammelt. Fällt derselbe nun frei von der Höhe h wieder herab, so ist die Schwerkraft die bewegende Kraft, und die Arbeitsgröße ist hierbei offenbar wieder Qh, da dasselbe Gewicht durch denselben Weg

in der Kraftrichtung geführt wird. Sei v die Endgeschwindigkeit des Körpers, so ist $h = \frac{v2}{2g}$, daher ist die Arbeitsgröße in diesem Falle auch ausgedrückt durch die Gleichung:

$$W = Qh = \frac{Qv^2}{2g}.$$

§. 211.

Lebendige Kraft. Wirkt eine constante Kraft **P** auf eine ruhende träge Masse **M** vom Gewichte Q t Secunden lang ein, und ist v die nach dieser Zeit erlangte Endgeschwindigkeit der Masse, s der vom Angriffspunkt in der Kraftrichtung zurückgelegte Weg, so hat man bekanntlich

$$v = \frac{P}{Q} gt \text{ und } s = \frac{1}{2} \frac{P}{Q} . gt^2.$$

Eliminirt man t aus diesen Gleichungen, so erhält man die Gleichung:

$$P.s = Q . \frac{v^2}{2g} \ldots 1.$$

Da aber $\frac{Q}{g} = M$ ist, so hat man auch:

$$Ps = \frac{Mv^2}{2} \ldots 2.$$

Es ist nun **P**.s oder das Product der constanten Kraft **P** in den von ihrem Angriffspunkt zurückgelegten Weg die Arbeitsgröße der Kraft **P**. Diese Arbeitsgröße ist aber gleich dem halben Product aus der Masse des Körpers in das Quadrat seiner erlangten Geschwindigkeit. Man nennt nun das Product aus der Masse in das Quadrat ihrer Geschwindigkeit die lebendige Kraft der Masse.

Wenn also eine constante Kraft eine ruhende Masse in eine gewisse Geschwindigkeit versetzt, so ist die verrichtete Arbeitsgröße derselben gleich der halben lebendigen Kraft.

Nun ist aber $\frac{v^2}{2g}$ die zu v gehörige Geschwindigkeitshöhe, und es ist dann nach Gl. 1 die verrichtete Arbeit gleich dem Product aus dem Gewichte des Körpers in der seiner Geschwindigkeit entsprechenden Geschwindigkeitshöhe. Setzt man **Ps** = **W**, so ist

$$W = \frac{Mv^2}{2} = Q . \frac{v^2}{2g} \ldots 3.$$

Um demnach die Arbeitsgröße einer Kraft zu bestimmen, die eine ruhende träge Masse durch ihren constanten Druck in eine gewisse Geschwindigkeit versetzt, braucht man nur das Gewicht der Masse und die erlangte Geschwindigkeit zu kennen.

Aufg. Welche Arbeitsgröße ist erforderlich, um einen 2000 Kilgr.

schweren Lastwagen aus dem Zustande der Ruhe auf einer horizontalen Bahn in eine Geschwindigkeit von 4 Meter zu versetzen?

Aufl. Hier ist $Q = 2000$; $v = 4$; $g = 9{,}808$; daher

$$W = \frac{2000 \,.\, 4^2}{2 \,.\, 9{,}808} = 1631{,}4 \text{ Kilogr.-Meter.}$$

§. 212.

Wirkungsfähigkeit einer in Bewegung befindlichen Masse. Wenn eine träge Masse in Bewegung versetzt, ihr eine gewisse Geschwindigkeit ertheilt wird, so nimmt sie die dazu verwendete Arbeitsgröße in sich auf. Sie wird sich von dem Augenblick der Beseitigung der bewegenden Kraft an vermöge ihrer Trägheit mit der erlangten Geschwindigkeit gleichförmig fortbewegen. Die ihr nun innewohnende Kraft hat man sehr bezeichnend die lebendige Kraft genannt, zum Unterschied des Drucks, den eine ruhende Masse auf ihre Unterlage ausübt, welchen man eine todte Kraft nennen kann, wie auch die Kräfte, welche ein statisches Gleichgewicht bedingen, als todte Kräfte angesehen werden können.

Wirkt nun auf eine solche in Bewegung befindliche Masse eine constante Kraft in einer ihrer Bewegung gerade entgegengesetzten Richtung, oder tritt ihr ein constanter Widerstand, den sie zu bewältigen hat, entgegen, so wird sie eine gleichförmig verzögerte Bewegung annehmen. Sie wird jene Kraft oder den Widerstand auf eine Strecke Weges überwinden, und zwar so lange bis ihre Geschwindigkeit Null geworden, sie zur Ruhe gebracht ist. Ist nun Q das Gewicht der Masse **M**, v ihre Geschwindigkeit, **P** die entgegenwirkende constante Kraft oder der constante Widerstand, s der Weg, durch welchen hindurch dieser überwunden wird, und t die Zeit, bis zu welcher die Masse in Ruhe kommt, so hat man:

$$0 = v - \frac{P}{Q} gt \text{ und } s = \frac{vt}{2}$$

hieraus ergibt sich:

$$Ps = \frac{Q \,.\, v^2}{2g} = \frac{Mv^2}{2}$$

oder da $Ps = W$

$$W = Q \,.\, \frac{v^2}{2g} = \frac{Mv^2}{2}.$$

Wirkt also eine solche in Bewegung befindliche Masse auf einen Widerstand so lange ein, bis ihre Geschwindigkeit vernichtet ist, so ist die dabei durch sie verrichtete Arbeitsgröße der Zahl nach gleich ihrer anfänglichen halben lebendigen Kraft.

Die Arbeitsgröße, welche die Masse auszuüben fähig ist, kommt also derjenigen ganz gleich, welche verwendet werden muß, um sie in den Zustand ihrer Bewegung zu versetzen. Die Masse sammelt also die Arbeitsgrößen der Kräfte, und gibt sie nach Umständen wieder ab.

Aufg. 1. Ein Eisenbahnzug, der sich auf gerader horizontaler

Bahn bewegt, hat in einem gewissen Augenblick eine Geschwindigkeit von 10 Meter. Das Gewicht beträgt 50000 Kilgr., der Reibungscoefficient $\frac{1}{200}$. Wenn nun die Dampfmaschine plötzlich gestopft wird, wie weit wird der Bahnzug sich noch vermöge der seiner Masse innewohnenden lebendigen Kraft fortbewegen, bis er stille steht?

Aufl. Hier ist die Reibung die Kraft, welche der Bewegung entgegen wirkt, also ist $P = \frac{50000}{200}$; $Q = 50000$ Kilogramm; $v = 10$ Meter. s sei die unbekannte von dem Bahnzug noch zu durchlaufende Wegstrecke. Man hat nun:

$$\frac{50000}{200} . s = \frac{50000 . 10^2}{2 . 9,808}$$

also $$s = 1019,5 \text{ Meter.}$$

Aufg. 2. Welches ist die Wirkungsfähigkeit einer Kanonenkugel von 6 Kilogramm Gewicht, wenn sie eine Geschwindigkeit von 400 Meter besitzt?

Aufl. Es ist $Q = 6$; $v = 400$, daher

$$W = \frac{6 . 400^2}{2 . 9,808} = 48989 \text{ Kilogr.-Meter.}$$

Aufg. 3. Ein Kanal liefert in der Secunde 2 Kubikmeter Wasser mit 1,5 Meter Geschwindigkeit. Welches ist die Wirkungsfähigkeit des Wassers?

Aufl. Das Gewicht des Wassers ist $Q = 2000$ Kilgr., $v = 1,5$; somit

$$W = \frac{2000 . 1,5^2}{2 . 9,808} = 229,4 \text{ Kilogr.-Meter.}$$

Aufg. 4. Eine Wassermasse von 2 Kubikmeter hat ein Gefälle von 3 Meter. Welche Arbeitsgröße kann dieselbe verrichten?

Aufl. Es ist $W = Q . H.$; $Q = 2000$ Kilgr.; $H = 3$, daher

$$W = 2000 . 3 = 6000 \text{ Kilogr.-Meter.}$$

§. 213.

Arbeitsgröße bei Geschwindigkeitsänderung einer trägen Masse. Eine träge Masse M vom Gewichte Q habe eine Geschwindigkeit v, welche auf die Geschwindigkeit v' gebracht werden soll, wobei $v' > v$ sei. Die Arbeitsgröße, welche erforderlich ist, um die Masse vom Zustande der Ruhe aus in die Geschwindigkeit v zu versetzen, ist $W' = \frac{Mv^2}{2}$; ebenso ist diejenige, welche erforderlich ist, um der ruhenden Masse die Geschwindigkeit v' mitzutheilen, $W'' = \frac{Mv'^2}{2}$. Es ist nun klar, daß die Arbeitsgröße W, die nöthig ist, um die Masse von der Geschwindigkeit v auf die v' zu bringen, gleich sein muß

$$W = W'' - W'$$

oder
$$W = \frac{Mv'^2}{2} - \frac{Mv^2}{2} = \frac{M}{2}(v'^2 - v^2)$$

$$W = \frac{Q}{2g}(v'^2 - v^2).$$

Die Arbeitsgröße, welche erforderlich ist, um die Geschwindigkeit einer trägen Masse zu vermehren, ist also gleich der halben lebendigen Kraft, die sie am Ende besitzt weniger der halben lebendigen Kraft, die sie am Anfang hatte, oder sie ist gleich der halben Differenz der lebendigen Kräfte am Anfang und am Ende der betrachteten Zeit.

Ist $v' < v$ oder soll die Geschwindigkeit der Masse vermindert werden, so gelten dieselben Gleichungen. Es wird dann der Ausdruck nur negativ, was so viel andeutet, daß die Richtung der constanten hemmenden Kraft der Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist. In diesem Falle kann man auch die Gleichung so anschreiben, daß das Resultat positiv wird, nämlich:

$$W = \frac{Mv^2 - Mv'^2}{2} = \frac{M}{2}(v^2 - v'^2) = \frac{Q}{2g}(v^2 - v'^2).$$

Aufg. 1. Eine Masse von 2000 Kilogramm Gewicht hat eine Geschwindigkeit von 2 Meter. Welche Arbeitsgröße ist erforderlich, um dieselbe auf die Geschwindigkeit von 5 Meter zu bringen?

Aufl. Es ist $Q = 2000$; $v' = 5$; $v = 2$, daher

$$W = \frac{2000\,(5^2 - 2^2)}{2.9{,}808} = 2141{,}1 \text{ Kilogr.-Meter.}$$

Aufg. 2. Welche Kraft muß durch einen Weg von 100 Meter auf obige Masse constant einwirken, um die verlangte Geschwindigkeitszunahme zu bewirken?

Aufl. Ist P die Kraft, so hat man:

$$W = P.100 = 2141{,}1;\ P = 21{,}41 \text{ Kilogr.}$$

§. 214.

Wird ein materieller Punkt durch eine veränderliche Kraft, die selbst wieder als die Mittelkraft mehrerer Kräfte angesehen werden kann, getrieben, und durchläuft er dabei eine beliebige Kurve, so kann man letztere in geradlinige Elemente zerlegt denken, der Art, daß man die Kraft auf den einzelnen Elementen als constant betrachten kann. Sei nun M die Masse vom Gewichte Q.; v', v'', v''' . . . die Geschwindigkeiten der Massen am Ende des ersten, zweiten, dritten u. s. w. Elementes, w', w'', w''' . . . die auf den einzelnen Elementen der Reihe nach verrichteten Arbeitsgrößen, so ist, wenn noch V die Anfangsgeschwindigkeit, v die Endgeschwindigkeit bezeichnen:

für das erste Element: $w' = \frac{Mv'^2}{2} - \frac{MV^2}{2}$

" " zweite " $w'' = \frac{Mv''^2}{2} - \frac{Mv'^2}{2}$

für das dritte Element $w''' = \frac{Mv'''^2}{2} - \frac{Mv''^2}{2}$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

" " nte " $w^n = \frac{Mv^2}{2} - \frac{Mv^{(n-1)2}}{2}$.

Addirt man sämmtliche Arbeitsgrößen und setzt ihre Summe $= w$, so ist

$$w = \frac{Mv^2}{2} - \frac{MV^2}{2} = \frac{Q}{2g}(v^2 - V^2).$$

Es ist also die Summe der Elementararbeiten oder die Totalarbeit einer veränderlichen Kraft der Zahl nach gleich der halben Differenz der lebendigen Kräfte der Masse am Anfange und am Ende der betrachteten Zeit.

§. 215.

Princip der lebendigen Kräfte. Betrachten wir ein System von materiellen Punkten oder Körpern, das der Wirkung beliebiger Kräfte unterworfen ist, und sich auf irgend eine Weise im Raume bewegt. Sei M die Masse des einen Körpers vom Gewichte Q, V seine Geschwindigkeit am Anfange, v die am Ende der betrachteten Zeit, so ist die Arbeitsgröße der an demselben thätigen Kräfte nach vorigem § nummerisch gleich:

$$w = \frac{Mv^2}{2} - \frac{MV^2}{2}.$$

Man wird nun für jeden Körper des Systems eine ähnliche Gleichung erhalten, und kann daher die Totalarbeit der Kräfte für das ganze System in folgender Gleichung ausdrücken:

$$W = \Sigma w = \frac{\Sigma Mv^2}{2} - \frac{\Sigma MV^2}{2}.$$

In dieser Gleichung ist das Princip der lebendigen Kräfte enthalten, welches also heißt:

Die Arbeitsgröße, welche nöthig ist, um ein Massensystem zu beschleunigen oder zu verzögern, ist gleich der halben Summe der gewonnenen oder verlornen lebendigen Kräfte des Systems; oder auch gleich der halben Aenderung der lebendigen Kräfte.

Dieses Princip ist von großer Wichtigkeit bei der Theorie der Maschinen. Wenn in einer Maschine die Kräfte den Widerständen gleich sind, so kann keine Bewegung entstehen. Es muß anfangs ein Ueberschuß von Kräften vorhanden sein, um die Maschine in Bewegung zu setzen, und zwar nur so lange bis alle Theile ihre normale Geschwindigkeit erlangt haben, oder die Maschine in den Beharrungszustand gekommen ist. Alsdann sind Kräfte und Widerstände im Gleichgewicht, und die Massen bewegen sich vermöge der Trägheit

mit der erlangten Geschwindigkeit fort. Ein solches Gleichgewicht nennt man das dynamische im Gegensatz zum statischen Gleichgewicht.

Viertes Kapitel.

Vom Trägheitsmoment.

§. 216.

Lebendige Kraft eines rotirenden Körpers. Betrachten wir einen Körper, der sich um eine feste Axe dreht. Es seien m', m'', m''' . . . die Massen der Körperelemente; r', r'', r''' . . . die Abstände derselben von der Drehaxe; v', v'', v''' . . . ihre absoluten Geschwindigkeiten, so sind die lebendigen Kräfte der einzelnen Massenelemente $m'v'^2$, $m''v''^2$, $m'''v'''^2$ . . . . Nun muß offenbar die Summe der lebendigen Kräfte der einzelnen Theile gleich sein der lebendigen Kraft L des ganzen Körpers, daher hat man:

$$L = m'v'^2 + m''v''^2 + m'''v'''^2 + \ldots$$

Ist u die Winkelgeschwindigkeit des Körpers, so ist $v' = r'u$, $v'' = r''u$, $v''' = r'''u$, . . . folglich ist auch

$$L = u^2 (m'r'^2 + m''r''^2 + m'''r'''^2 + \ldots)$$

oder $$L = u^2 \Sigma mr^2.$$

Man nennt nun das Product aus der Masse in das Quadrat ihrer Entfernung von der Drehaxe das Trägheitsmoment dieser Masse. Der Ausdruck Σmr^2 gibt aber das Trägheitsmoment des ganzen Körpers. Wird dieses mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet, so ist auch

$$L = u^2 \mathfrak{M}.$$

d. h. die lebendige Kraft eines rotirenden Körpers wird erhalten, wenn man sein Trägheitsmoment mit dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit multiplicirt.

Aendert sich die Winkelgeschwindigkeit u durch beschleunigte Bewegung in u_0, so ist jetzt die lebendige Kraft $u_0^2\mathfrak{M}$., also der Zuwachs an lebendiger Kraft $u_0^2\mathfrak{M} - u^2\mathfrak{M}$. Demnach ist die Arbeitsgröße W, welche zur Aenderung der Winkelgeschwindigkeit erforderlich war:

$$W = \frac{u_0^2\mathfrak{M}}{2} - \frac{u^2\mathfrak{M}}{2} = \frac{1}{2}\mathfrak{M}(u_0^2 - u^2).$$

§. 217.

Bestimmung der Drehbewegung. Wirkt an dem Körper eine Anzahl constanter Kräfte, so wird die Drehbewegung eine beschleunigte. Sei φ die Winkelbeschleunigung oder die Beschleunigung eines Punktes in der Entfernung Eins von der Drehaxe, σ der in der Zeit t von diesem Punkte zurückgelegte Bogen, u die Winkelgeschwindigkeit am Anfange und u_0 am Ende dieser Zeit. Man hat dann nach §. 181

$$u_0 = u + \varphi t$$
$$\sigma = ut + \frac{1}{2}\varphi t^2.$$

Wenn man nun mit Hilfe dieser beiden Gleichungen die Größen u_0 und u aus der letzten Gleichung des vorigen Paragraphen eliminirt, so erhält man

$$W = \mathfrak{M}.\varphi\sigma \ldots 1.$$

Zerlegt man nun sämmtliche Kräfte jede in zwei Seitenkräfte, wovon eine in einer zur Drehaxe normalen Ebene liegt, die andere aber paralleler zur Axe geht, so haben die letztern auf die Drehbewegung keinen Einfluß, und können daher vernachlässigt werden. Die erstern aber seien P', P'', P''' ... und ihre Abstände von der Drehaxe oder ihre Hebelsarme p', p'', p''' ... Die von den Angriffspunkten gleichzeitig zurückgelegten Wege sind nun $p'\sigma$, $p''\sigma$, $p'''\sigma$, ... daher die Arbeitsgrößen der Kräfte $P'p'\sigma$, $P''p''\sigma$, $P'''p'''\sigma$ ... somit ist

$$W = P'p'\sigma + P''p''\sigma + P'''p'''\sigma + \ldots = \sigma\Sigma Pp.$$

Setzt man diesen Werth in Gl. 1, so wird

$$\sigma\Sigma Pp = \mathfrak{M}\varphi\sigma$$

und daraus
$$\varphi = \frac{\Sigma Pp}{\mathfrak{M}} \ldots 2$$

d. h. man findet die Winkelbeschleunigung, wenn man die algebraische Summe der statischen Momente der Kräfte durch das Trägheitsmoment dividirt.

Nachdem nun die Winkelbeschleunigung bestimmt ist, können sofort alle Fragen über die beschleunigte Drehbewegung gelöst werden.

Wirken constante Kräfte auf den Körper, so kann man die dadurch erzeugte Winkelgeschwindigkeit u finden, wenn man die in den zur Axe normalen Ebenen liegenden Seitenkräfte auf eine Kraft in der Entfernung gleich Eins reducirt. Da $\mathfrak{M}$ auch die dahin vereinigte Masse des Körpers bedeutet, so ist die durch jene Kraft ΣPp erzeugte Winkelgeschwindigkeit nach Gl. 4, §. 199

$$u = \frac{\Sigma Pp}{\mathfrak{M}}.$$

Und wenn schon eine Anfangsgeschwindigkeit U vorhanden ist, ergibt sich leicht:

$$u = U + \frac{\Sigma Pp}{\mathfrak{M}}.$$

§. 218.

Reduction der Massen. Das Trägheitsmoment gibt uns eine Masse an, die in der Entfernung gleich Eins von der Drehaxe angebracht, denselben Einfluß auf die Bewegung äußert, wie der ganze Körper. Wenn nun die Trägheitsmomente zweier Massen gleich sind, so müssen auch ihre lebendigen Kräfte bei gleicher Winkelgeschwindigkeit, wie aus §. 116 folgt, gleich sein. Sie müssen also gleichen Einfluß auf die Bewegung des Systems, mit dem sie ver-

bunden sind, haben. Es sei nun M eine Masse in der Entfernung R, welche in dieser Beziehung dieselbe Wirkung haben soll, wie der ganze Körper, so muß offenbar stattfinden

$$MR^2 = \Sigma mr^2 = \mathfrak{M}$$

hieraus folgt: $$M = \frac{\Sigma mr^2}{R^2} = \frac{\mathfrak{M}}{R^2}.$$

d. h. man findet die Masse, welche, in einer bestimmten Entfernung von der Drehaxe angebracht, den Körper bei der Drehbewegung ersetzen kann, wenn man das Trägheitsmoment dieses Körpers durch das Quadrat der Entfernung dieser Masse dividirt.

Dieses Verfahren über das Auffinden der Massen heißt man die Reduction der Massen.

§. 219.

Trägheitsmoment der Körper auf ihren Inhalt bezogen. Wir betrachten hier nur homogene Körper, d. h. solche, bei welchen gleiche Raumtheile auch gleiches Gewicht haben, oder die Inhalte den Gewichten proportional sind. Es ist alsdann das Bestimmen des Trägheitsmomentes eine rein geometrische Aufgabe.

Es sei γ das Gewicht einer Kubikeinheit des Körpers i', i'', i'''... die Inhalte der einzelnen Körperelemente, q', q'', q'''... ihre Gewichte. Alsdann sind $q' = i'\gamma$, $q'' = i''\gamma$, $q''' = i'''\gamma$..., folglich ihre Massen $m' = \frac{i'\gamma}{g}$, $m'' = \frac{i''\gamma}{g}$, $m''' = \frac{i'''\gamma}{g}$... Setzt man diese Werthe mit Beibehaltung der frühern Bezeichnung in §. 116, so hat man:

$$\mathfrak{M} = \frac{i'\gamma . r'^2}{g} + \frac{i''\gamma}{g} . r''^2 + \frac{i''\gamma}{g} . r'''^2 + \ldots$$

$$\mathfrak{M} = \frac{\gamma}{g} (i' r'^2 + i'' r''^2 + i''' r'''^2 + \ldots) = \frac{\gamma}{g} \Sigma ir^2.$$

§. 220.

Trägheitsmoment in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende parallele Axe. Wir wollen annehmen, es sei A der Schwerpunkt des Körpers, Fig. 170, B der Punkt, in welchem die Drehaxe, normal zur Ebene der Figur, diese treffe. Durch den Punkt A lege man drei rechtwinkelige Coordinatenaxen X, Y, Z, so zwar, daß die Axe der x auch durch B gehe und die Axe der z durch A normal auf die Ebene der Figur, so daß also die beiden durch A und B gehenden Axen parallel sind. Das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Drehaxe sei $\mathfrak{M}'$ und in Bezug auf die durch B gehende Axe $\mathfrak{M}$. Sei nun D ein Punkt des Körpers, dessen Masse m und die Coordinaten dieses Punktes in Bezug auf die Coordinatenaxen X und Y $AC = x$, $DC = y$; ferner die Entfernung der beiden Drehaxen $AB = d$, dann

$AD = r'$, $BD = r$. Nun ist $r'^2 = (x^2 + y^2)$; $r^2 = (d + x)^2 + y^2$; daher das Trägheitsmoment des Körperelementes D in Bezug auf die durch A gehende Drehaxe $= m\ (x^2 + y^2)$ und in Bezug auf die durch B gehende $= m\ ([x + d]^2 + y^2)$. Also ist

$$\mathfrak{M}' = \Sigma m\ (x^2 + y^2)$$
$$\mathfrak{M} = \Sigma m\ [(x + d)^2 + y^2].$$

Entwickelt man letztern Ausdruck, so erhält man

$$\mathfrak{M} = d^2\ \Sigma m + \Sigma m\ (x^2 + y^2) + 2d\Sigma mx.$$

Nun ist aber nach der Lehre vom Schwerpunkt $\Sigma mx = 0$. Setzt man die Masse des ganzen Körpers $\Sigma m = M$, so erhält man

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + Md^2$$

d. h. man findet das Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf irgend eine Axe, wenn man zu dem Trägheitsmoment in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende mit jener parallele Axe, das Product aus der Masse des Körpers in das Quadrat der Entfernung beider Axen addirt.

§. 221.

Trägheitsmoment einer materiellen geraden Linie oder einer dünnen Stange. Eine dünne Stange AB, Fig. 171, drehe sich um die Axe XX, so zwar, daß der eine Endpunkt A auf der Drehaxe verbleibe und die ganze Stange um dieselbe einen Kegelmantel beschreibe. Der Winkel, welchen sie mit der Drehaxe bildet, sei $BAC = \alpha$, ihre Länge $AB = l$ und f ihr Querschnitt in allen Punkten. Um nun das Trägheitsmoment derselben zu bestimmen, theile man sie in n sehr kleine gleiche Theile Ab, bc, cd ... Jedes dieser Elemente hat die Länge $\frac{l}{n}$, also einen Inhalt gleich $\frac{fl}{n}$. Die Abstände der Schwerpunkte dieser Elemente seien die Perpendikel be, cf, dg ... Nun ist $be = \frac{l}{n} . \sin \alpha$, $cf = \frac{2l}{n} . \sin \alpha$, $dg = \frac{3l}{n} . \sin \alpha$ ... Multiplicirt man den Inhalt eines jeden Elementes mit dem Quadrate seines Abstandes von der Drehaxe, so erhält man mit Rücksicht auf §. 119

$$\Sigma ir^2 = \frac{fl}{n} . \frac{l^2 \sin^2 \alpha}{n^2} + \frac{fl}{n} . \frac{2^2\, l^2 \sin^2 \alpha}{n^2} + \frac{fl}{n} . \frac{3^2 l^2 \sin^2 \alpha}{n^2} + \ldots$$

daher das Trägheitsmoment:

$$\mathfrak{M} = \frac{\gamma}{g} . \frac{fl^3}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2) \sin^2 \alpha = \frac{\gamma}{g} . \frac{fl^3}{n^3} . \frac{n^3}{3} \sin^2 \alpha$$

$$\mathfrak{M} = \frac{\gamma}{g} . fl . \frac{l^2}{3} . \sin^2 \alpha.$$

Es ist nun $fl = i$ der Inhalt der Stange, daher

$$\mathfrak{M} = \frac{\gamma}{g} . i . \frac{l^2 . \sin^2 \alpha}{3}.$$

Da aber $\frac{\gamma}{g}$. i der Masse M der ganzen Stange gleich ist, so hat man auch:

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{3} Ml^2 \sin^2 \alpha.$$

Ist $a = l \sin \alpha$ der Abstand des Endes B von der Drehaxe, so ist auch

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{3} Ma^2.$$

Wenn die Stange normal gegen die Drehaxe gerichtet ist, Fig. 172, so wird $\alpha = 90^0$, also $\sin \alpha = 1$, daher

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{3} Ml^2 \ldots 1.$$

Es widersteht also die Stange AB durch ihre träge Masse M bei der Umdrehung um die Axe XX gerade so, als ob der dritte Theil der gesammten Masse im Endpunkte B vereinigt und AB ohne Masse wäre.

Es sei C der Punkt, in welchem die ganze Masse vereinigt dasselbe Trägheitsmoment habe wie die ganze Stange, so muß stattfinden $M . AC^2 = \frac{1}{3} Ml^2$. Daraus folgt $AC = \frac{1}{3} l \sqrt{3} = 0{,}5773 l$. Man nennt diesen so bestimmten Punkt den **Mittelpunkt der Trägheit**.

Geht die Drehaxe durch die Mitte oder den Schwerpunkt der Linie AB, so ist nach §. 120 $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} - Md^2 = \frac{1}{3} Ml^2 - M\left(\frac{1}{2} l\right)^2$, also

$$\mathfrak{M}' = \frac{1}{12} Ml^2 \ldots 2.$$

§. 222.

Trägheitsmoment eines materiellen Rechtecks. Ein materielles Rechteck ABDC, Fig. 173, drehe sich um die durch seinen Schwerpunkt S gehende auf seiner Ebene rechtwinkelig stehende Axe XX. Es seien die Seiten AC = a, AB = b und die unendlich kleine Dicke oder Höhe = e. Man ziehe MN durch den Schwerpunkt parallel zu AC, theile $MB = \frac{b}{2}$ in n gleiche Theile, wovon also jeder gleich $\frac{b}{2n}$; ziehe durch diese Theilungspunkte parallele Linien zu MN; dadurch wird das halbe Rechteck in lauter sehr schmale Streifen zerlegt, die alle ihre Schwerpunkte in der durch S mit AB parallel gezogenen Linie EF haben. Die Masse eines jeden Streifen ist $m = \frac{\gamma eab}{g2n}$,

die Entfernungen derselben von der Drehaxe sind der Reihe nach $\frac{b}{2n}$, $\frac{2b}{2n}$, $\frac{3b}{2n}$, ... $\frac{nb}{2n}$. Nun ist nach vorigem § das Trägheitsmoment eines jeden Streifen $\frac{1}{12}$ ma^2 in Bezug auf eine durch seinen Schwerpunkt mit XX parallel gehende Axe. Bezieht man aber die Trägheitsmomente alle auf die durch S gehende Drehaxe, so ist allgemein für jedes Element das Trägheitsmoment gleich $\frac{1}{12}ma^2 + md^2$. Daher für das erste Element: $m\left[\frac{a^2}{12} + \left(\frac{b}{2n}\right)^2\right]$, für das zweite: $m\left[\frac{a^2}{12} + 2^2\left(\frac{b}{2n}\right)^2\right]$, für das nte $m\left[\frac{a^2}{12} + n^2\left(\frac{b}{2n}\right)^2\right]$. Bildet man die Summe sämmtlicher Trägheitsmomente, so erhält man das Trägheitsmoment des halben Rechtecks gleich:

$$m\left[\frac{na^2}{12} + \frac{b^2}{4n^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2)\right] = m\left[\frac{na^2}{12} + \frac{b^2}{4n^2}\cdot\frac{n^3}{3}\right]$$

Für das ganze Rechteck ist daher das Trägheitsmoment das Doppelte, oder

$$\mathfrak{M} = 2m\left[\frac{na^2}{12} + \frac{nb^2}{12}\right] = \frac{2\gamma eab}{g\,.\,2n}\left[\frac{na^2}{12} + \frac{nb^2}{12}\right]$$

$$\mathfrak{M} = \frac{\gamma eab}{g\,.\,12}(a^2 + b^2).$$

Sei $M = \frac{\gamma eab}{g}$ die Masse des Rechtecks, so ist auch

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{12}(a^2 + b^2).$$

§. 223.

Trägheitsmoment eines Parallelepipeds. 1. Die Drehaxe XX, Fig. 174, gehe durch die Schwerpunkte beider Grundflächen. Es sei AC = a, AB = b, AA′ = l. Man theile die Kante AA′ in n gleiche unendlich kleine Theile, wovon jeder $\frac{c}{n}$, lege durch diese Theilpunkte Ebenen parallel den Grundflächen, so wird dadurch der Körper in lauter materielle Rechtecke von gleicher Dicke $\frac{l}{n}$ zerlegt. Nun ist aber das Trägheitsmoment eines solchen Rechtecks in Bezug auf die angenommene Axe nach vorigem § gleich $\frac{\gamma ab\,.\,l}{g\,.\,12\,.\,n}(a^2 + b^2)$. Addirt man die Trägheitsmomente sämmtlicher Elemente, so erhält man das Trägheitsmoment des ganzen Körpers. Die Trägheitsmomente

der Elemente sind aber alle gleich und ihre Anzahl n, daher hat man für den ganzen Körper das Trägheitsmoment

$$\mathfrak{M} = \frac{n.\gamma abl}{g.12.n} (a^2 + b^2) = \frac{\gamma abl}{g.12} (a^2 + b^2).$$

Ist M die Masse des ganzen Körpers, so folgt auch:

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{12} (a^2 + b^2).$$

2. Die Drehaxe falle mit der Kante AA′ zusammen, Fig. 175. Nach §. 120 ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + Md^2$. Hier ist $\mathfrak{M}' = \frac{M}{12} (a^2 + b^2)$ das Trägheitsmoment in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende parallele Axe. d die Entfernung AS beider Axen, also $d^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$, daher

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{12} (a^2 + b^2) + M \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right)$$

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{3} (a^2 + b^2).$$

3. Die Drehaxe gehe durch die Mitte der Seiten AB und A′B′, Fig. 176. Hier ist $d^2 = \frac{a^2}{4}$, also $\mathfrak{M} = \frac{M}{12} (a^2 + b^2) + \frac{Ma^2}{4}$

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{12} (4a^2 + b^2).$$

4. Geht die Drehaxe durch die Mitte der Kanten AB und CD, dann ist

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{12} (4l^2 + b^2).$$

5. Wenn die Drehaxe mit der vorigen parallel durch den Schwerpunkt geht, dann ist

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{12} (l^2 + b^2).$$

6. Für eine Axe, welche um d von der durch den Schwerpunkt gehenden in gleicher Normalebene auf die Kanten mit jener liegenden entfernt ist, Fig. 177, findet man das Trägheitsmoment

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{12} (l^2 + b^2) + Md^2.$$

Für eine rechteckige Platte, wobei b gegen l und a vernachlässigt werden kann, ist

$$\mathfrak{M} = M \left(d^2 + \frac{l^2}{12}\right).$$

§. 224.

Trägheitsmoment eines dreiseitigen Prismas, dessen Grundflächen rechtwinkelige Dreiecke sind. Es sei Fig. 178 ein dreiseitiges Prisma, ABD und A'B'D' die Grundflächen desselben. Bei B sei der rechte Winkel BD = a, AB = b, AA' = l. Man ergänze das dreiseitige Prisma zu einem Parallelepiped BC'.

1. Die Drehaxe gehe durch die Durchschnittspunkte S, S' der Diagonalen der Grundflächen des Parallelepipeds oder durch die Mitte der Hypotenusen der Grundflächen des dreiseitigen Prismas. Da nun das Parallelepiped durch die Diagonalebene AD A'D' in zwei rechtwinkelige congruente dreiseitige Prismen zerlegt wird, so sind die Trägheitsmomente derselben in Bezug auf die Axe XX einander gleich. Ist nun die Masse des gegebenen dreiseitigen Prismas M, so wäre die Masse des Parallelepipeds BC' gleich 2M, und sein Trägheitsmoment nach vorigem § in Bezug auf erwähnte Axe $\frac{2M}{12}(a^2 + b^2)$; daher ist das Trägheitsmoment von der Hälfte desselben oder des dreiseitigen Prismas

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{12}(a^2 + b^2).$$

Bezeichnet d = AD die Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks, so ist $d^2 = a^2 + b^2$, daher auch:

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{12} \cdot d^2.$$

2. Die Drehaxe gehe durch den Schwerpunkt der Grundfläche mit der vorigen parallel. Sei k der Schwerpunkt, so ist wieder

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + MSk^2$$
$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} - MSk^2$$

oder da $Sk = \frac{1}{3}\, SB = \frac{1}{3} \cdot \frac{d}{2} = \frac{d}{6}$, so ist auch

$$\mathfrak{M}' = \frac{Md^2}{12} - \frac{Md^2}{36} = \frac{1}{18}\, M \cdot d^2$$
$$\mathfrak{M}' = \frac{M}{18}(a^2 + b^2).$$

3. In Bezug auf die Kante BB' hat man

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + M.Bk^2 = \frac{Md^2}{18} + M\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{d}{2}\right)^2$$
$$\mathfrak{M} = \frac{Md^2}{6} = \frac{M}{6}(a^2 + b^2).$$

§. 225.

Trägheitsmoment eines dreiseitigen Prismas mit gleichschenkeligen Grundflächen. Es sei, Fig. 179, ABD die Grundfläche, AC = BC = d, die Höhe DC = h.

1. Die Drehaxe gehe durch die Mitte D der Grundlinie parallel den Längenkanten. Eine Ebene durch DCD′C′ theilt das Prisma in zwei congruente Prismen, deren Grundflächen rechtwinkelige Dreiecke sind. Ist die Masse des ganzen Prismas M, so ist die jeder Hälfte $\frac{M}{2}$. In Bezug auf eine durch die Kante D des rechten Winkels gehende Axe ist das Trägheitsmoment der einen Hälfte nach vorigem § gleich $\frac{1}{6} \cdot \frac{M}{2} \cdot d^2$, daher für beide Hälften oder für das ganze Prisma

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{6} \cdot d^2.$$

2. Für eine durch den Schwerpunkt S gehende Drehaxe ist das Trägheitsmoment $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} - MSD^2$

$$\mathfrak{M}' = \frac{Md^2}{6} - M\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{Md^2}{6} - \frac{Mh^2}{9}.$$

3. Geht die Drehaxe durch die Eckpunkte CC′, so ist das Trägheitsmoment $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + MSC^2$

$$\mathfrak{M} = \frac{Md^2}{6} - \frac{Mh^2}{9} + M\left(\frac{2h}{3}\right)^2$$

$$\mathfrak{M} = M\left(\frac{d^2}{6} + \frac{h^2}{3}\right).$$

§. 226.

Trägheitsmoment eines senkrechten Prismas, dessen Grundflächen regelmäßige Vielecke sind. Es sei ABCDEF, Fig. 180, die eine Grundfläche des Prismas. Die Drehaxe gehe durch die Schwerpunkte S beider Grundflächen. Ist das Prisma n seitig, so läßt sich dasselbe in n dreiseitige gleiche Prismen zerlegen, deren Grundflächen gleichschenkelige Dreiecke ASB sind. Sei M die Masse des ganzen Prismas, SA — r, SG = h, dann ist $\frac{M}{n}$ die Masse jedes der dreiseitigen Prismen und das Trägheitsmoment eines solchen nach vorigem § in Bezug auf die Kante oder Axe durch S gleich $\frac{M}{n}\left(\frac{r^2}{6} + \frac{h^2}{3}\right)$. Da nun n solcher Theile vorhanden sind, die alle dieselbe Drehaxe haben, so ist das Trägheitsmoment des ganzen Körpers $n \cdot \frac{M}{n}\left(\frac{r^2}{6} + \frac{h^2}{3}\right)$ oder:

$$\mathfrak{M} = M\left(\frac{r^2}{6} + \frac{h^2}{3}\right).$$

§. 227.

Trägheitsmoment eines senkrechten Kreiscylinders. Man kann den Cylinder betrachten als ein Prisma von unendlich vielen Seiten, und es wird letzteres in einen Cylinder übergehen, wenn

h = r gleich dem Radius desselben wird. Somit erhält man nach vorigem Paragraphen das Trägheitsmoment des Cylinders, Fig. 181,

$$\mathfrak{M} = M\left(\frac{r^2}{6} + \frac{r^2}{3}\right)$$

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2} Mr^2 \;.\;.\;.\; 1.$$

Das Trägheitsmoment eines massiven Cylinders ist also gleich dem Trägheitsmoment der halben Masse desselben in seinem Umfange oder im Cylindermantel vereinigt.

Ist l die Länge des Cylinders, so ist $M = \frac{r^2 \pi l \gamma}{g}$, daher auch

$$\mathfrak{M} = \frac{\pi l \gamma}{2g} \,.\, r^4 \;.\;.\;.\; 2.$$

§. 228.

Trägheitsmoment eines hohlen Cylinders. Es sei M′ die Masse, r′ der Radius, $\mathfrak{M}'$ das Trägheitsmoment des vollen Cylinders; M″ die Masse, r″ der Radius, $\mathfrak{M}''$ das Trägheitsmoment des hohlen Raumes. Dann ist $\mathfrak{M}' = \frac{1}{2} M' r'^2$, $\mathfrak{M}'' = \frac{1}{2} M'' r''^2$.

Daher ist das Trägheitsmoment des hohlen Cylinders in Bezug auf seine geometrische Axe, Fig. 181a

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' - \mathfrak{M}'' = \frac{1}{2}\,(M' r'^2 - M'' r''^2)$$

oder auch mit Bezug auf Gl. 2 des vorigen §

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2} \,.\, \frac{\pi l \gamma}{g}\,(r'^4 - r''^4).$$

Es ist aber $\frac{\pi l \gamma}{g}\,(r'^2 - r''^2) = M$ gleich der Masse des hohlen Cylinders, daher wird das gesuchte Trägheitsmoment auch

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2} M\,(r'^2 + r''^2).$$

Wenn $r = \frac{r' + r''}{2}$ den mittlern Radius und $b = r' - r''$ die Dicke der Ringfläche bedeutet, so findet man aus diesen beiden Gleichungen $\frac{1}{2}\,(r'^2 + r''^2) = \frac{b^2}{4} + r^2$, daher ist

$$\mathfrak{M} = M\left(r^2 + \frac{b^2}{4}\right).$$

Für $b = \frac{1}{5}\, r$ wird $\frac{b^2}{4} = \frac{r^2}{100}$. Läßt man diesen Werth außer Acht, so hat man bis auf $\frac{1}{100}$ des Ganzen das Resultat:

$$\mathfrak{M} = Mr^2.$$

§. 229.

Trägheitsmoment eines senkrechten Kreiskegels. Es sei r der Radius der Grundfläche, h die Höhe des Kegels, Fig. 182. Man denke sich die Höhe h in n gleiche unendlich kleine Theile jeden gleich d getheilt und durch diese Theilungspunkte Ebenen parallel zur Grundfläche geführt. Dadurch wird der Kegel in lauter cylindrische Elemente von gleicher Dicke zerlegt. Sei EFGH ein solches Element, Jk = d, CJ = x, dann ist der Radius desselben $GJ = \frac{rx}{h}$. Es ist daher das Trägheitsmoment dieses Elementes nach §. 127 gleich $\frac{\pi\gamma}{2g} \cdot \frac{r^4x^4}{h^4} \cdot d$. Setzt man nun der Reihe nach 0d, 1d, 2d ... nd für x, so erhält man die Trägheitsmomente aller einzelnen Elemente. Addirt man dieselben, so erhält man das Trägheitsmoment des ganzen Kegels in Bezug auf seine geometrische Axe

$$\mathfrak{M} = \frac{\pi\gamma r^4 d^5}{2 . g . h^4}(0^4 + 1^4 + 2^4 + \ldots n^4) = \frac{\pi\gamma r^4 d^5 . n^5}{2 . g . h^4 . 5}.$$

Nun ist nd = h, also folgt:

$$\mathfrak{M} = \frac{\pi\gamma r^4 . h}{10g} \quad \ldots 1.$$

Bezeichnet M die Masse des Kegels, so ist auch

$$\mathfrak{M} = \frac{3}{10} Mr^2 \quad \ldots 2.$$

§. 230.

Trägheitsmoment eines Kugelsegments. Es sei Fig. 183 ABC das Kugelsegment, CD = h dessen Höhe, r der Radius der zugehörigen Kugel. Man theile die Höhe des Segments in n unendlich viele gleiche Theile, wovon jeder d sei. Durch die Theilungspunkte führe man Parallelebenen zur Grundfläche AB. Dadurch wird das Segment in lauter cylindrische Schichten von gleicher Dicke zerlegt. Es sei EG eine solche Schichte und CF = x, dann ist das Quadrat des Radius derselben $EF^2 = (2r - x)x = 2rx - x^2$. Da d die Dicke des Elementes ist, so folgt nach §. 127 das Trägheitsmoment dieses Elementes, wenn dieser Werth für r^2 und d für l gesetzt wird: $\frac{\pi\gamma d}{2g}(2rx - x^2)^2$. Setzt man in diesen Ausdruck der Reihe nach 0d, 1d, 2d ... für x, so erhält man die Trägheitsmomente sämmtlicher Elemente vom Scheitel an. Durch Addition derselben erhält man das Trägheitsmoment des ganzen Segmentes.

Also

$$\mathfrak{M} = \frac{\pi\gamma d}{2g}\{(2r . 0 . d - 0^2 . d^2)^2 + (2r . 1 . d - 1^2 . d^2)^2 + (2r . 2 . d - 2^2 . d^2)^2 + \ldots\}$$

$$= \frac{\pi\gamma}{2g}\{4r^2d^3(0^2+1^2+2^2+\ldots)-4rd^4(0^3+1^3+2^3+\ldots)+d^5(0^4+1^4+2^4+\ldots)\}$$

$$= \frac{\pi\gamma}{2g}\left(\frac{4}{3}r^2n^3d^3 - rn^4d^4 + \frac{1}{5}.n^5d^5\right)$$

$$= \frac{\pi\gamma}{2g}\left(\frac{4}{3}r^2h^3 - rh^4 + \frac{1}{5}h^5\right)$$

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{30}.\frac{\pi\gamma h^3}{g}.(20r^2 - 15rh + 3h^2).$$

Für eine Linse, die aus zwei gleichen mit ihren Grundflächen zusammenstoßenden Kugelsegmenten besteht, hat man ebenfalls in Bezug auf ihre geometrische Axe das Trägheitsmoment:

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{15}.\frac{\pi\gamma h^3}{g}.(2r^2 - 15rh + 3h^2).$$

Der Inhalt der Linse ist $2\pi h^2\left(r - \frac{1}{3}h\right)$, daher die Masse $\frac{2\pi h^2\gamma}{g}\left(r - \frac{1}{3}h\right) = M$. Demnach

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{10}\left(\frac{20hr^2 - 15rh^2 + 3h^3}{3r - h}\right).$$

§. 231.

Trägheitsmoment einer Kugel. Wird, unter Bezug auf vorigen §, $h = r$, dann ist das Segment eine Halbkugel. Es ist daher das Trägheitsmoment einer Halbkugel:

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{30}.\frac{\pi\gamma r^3}{g}.(20r^2 - 15r^2 + 3r^2)$$

$$\mathfrak{M} = \frac{4}{15}.\frac{\pi\gamma r^5}{g}.$$

Nimmt man dieses Resultat doppelt, so erhält man das Trägheitsmoment einer Kugel:

$$\mathfrak{M} = \frac{8}{15}.\frac{\pi\gamma r^5}{g}.$$

Führt man die Masse der Kugel $M = \frac{4r^3\pi\gamma}{3.g}$ ein, so ist

$$\mathfrak{M} = \frac{2}{5}Mr^2.$$

Schwingt sich die Kugel um irgend eine um d vom Centrum entfernte Axe, so ist das Trägheitsmoment in Bezug auf dieselbe

$$\mathfrak{M} = M\left(\frac{2}{5}r^2 + d^2\right).$$

§. 232.

Trägheitsmoment eines Schwungrades. Es sei R der mittlere Radius des Schwungringes, b dessen Breite in der Richtung des Radius, Q das Gewicht desselben; a die mittlere Breite der

Radarme auf die Ebene des Rades, l ihre Länge zwischen Schwungring und Nabe, Q' das Gewicht sämmtlicher Arme; r der äußere, ρ der innere Radius der Nabe, Q'' deren Gewicht. Nun hat man in Bezug auf die Drehaxe das Trägheitsmoment

des Schwungringes $\frac{Q}{g}\left[\left(R + \frac{1}{2}b\right)^2 + \left(R - \frac{1}{2}b\right)^2\right]$

der Arme $\frac{Q'}{g}\left[\left(\frac{a^2 + l^2}{12}\right) + \left(r + \frac{l}{2}\right)^2\right]$

der Nabe $\frac{Q''}{g}\left(\frac{r^2 + \varrho^2}{2}\right).$

Folglich ist das Trägheitsmoment des ganzen Schwungrades:

$$\mathfrak{M} = \frac{Q}{g}\left[\left(R + \frac{1}{2}b\right)^2 + \left(R - \frac{1}{2}b\right)^2\right] + \frac{Q'}{g}\left[\left(\frac{a^2+l^2}{12}\right) + \left(r + \frac{l}{2}\right)^2\right] + \frac{Q''}{g}\left(\frac{r^2 + \varrho^2}{2}\right)$$

$$= \frac{Q}{g}\left(\frac{4R^2 + b^2}{4}\right) + \frac{Q'}{g}\left(\frac{a^2 + 4l^2}{12} + lr + r^2\right) + \frac{Q''}{g}\left(\frac{r^2 + \varrho^2}{2}\right).$$

Wird das Trägheitsmoment der Nabe ganz vernachlässigt, so gebraucht man auch häufig den annähernden Ausdruck:

$$\mathfrak{M} = \frac{Q}{g} R^2 + \frac{Q'}{g}.\frac{R^2}{3} = \frac{R^2}{g}\left(Q + \frac{Q'}{3}\right).$$

Nimmt man $Q' = \frac{1}{5}Q$, so folgt

$$\mathfrak{M} = 1,0666\ \frac{QR^2}{g}.$$

§. 233.

Trägheitsmoment eines Schwanzhammers. Der Schwanzhammer, Fig. 184, bestehe aus dem hölzernen parallelepipedischen Hammerhelme AB, der sich mittelst einer aufgeschobenen Hülse C um Zapfen drehen kann, und dem Kopfe H, der am Helme durch Keile befestigt ist. Es sei Q das Gewicht dieses Kopfes, r die Entfernung seines Schwerpunktes von der Drehaxe, so wird $\frac{Qr^2}{g}$ annähernd, und wegen der Kleinheit seiner Dimensionen im Verhältniß zu r genau genug sein Trägheitsmoment geben. Ferner sei b die Breite, h die Höhe, l die Länge, Q' das Gewicht des Helmes. Das Trägheitsmoment dieses Parallelepipeds in Bezug auf eine durch seinen Schwerpunkt D gehende mit b parallele Axe ist $\frac{Q'}{12g}.(h^2 + l^2)$. Wenn nun CD = d die Entfernung des Schwerpunktes von C ist, so ist in Bezug auf letztere das Trägheitsmoment des Helmes:

$$\frac{Q'}{12g}(h^2 + l^2) + \frac{Q'}{g} \cdot d^2 = \frac{Q'}{g}\left(d^2 + \frac{h^2 + l^2}{12}\right).$$

Also ist das Trägheitsmoment des Hammers ohne Rücksicht auf die unbedeutendern Theile:

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{g}\left[Qr^2 + Q'\left(d^2 + \frac{h^2 + l^2}{12}\right)\right].$$

§. 234.

Bewegung bei einer festen Rolle. Ueber eine feste Rolle, Fig. 185, sei ein Seil geschlungen, an dessen Enden zwei Gewichte P und Q hängen, wovon $P > Q$ sei. Man soll die Beschleunigung des Gewichtes P mit Rücksicht auf Reibung und die Masse der Rolle bestimmen?

Aufl. Der Radius der Rolle sei r, der des Zapfens ϱ, das Gewicht der Rolle W, die Seildicke δ, der Reibungscoefficient μ. Für den Zustand des Gleichgewichtes hat man die Gleichung

$$P = Q\frac{(r + k\delta^2)}{r} + \frac{\mu\varrho}{r} \cdot (P + Q + W).$$

Soll aber Bewegung stattfinden, so muß die rechte Seite dieser Gleichung kleiner sein als das Gewicht P. Es ist dann

$P - \left[\frac{Q(r + k\delta^2)}{r} + \frac{\mu\varrho}{r}(W + P + Q)\right]$ die bewegende Kraft oder die Ueberwucht. Es müssen nun noch sämmtliche träge Massen an den Umfang der Rolle reducirt werden. Die Masse von P ist $\frac{P}{g}$, die von Q ist $\frac{Q}{g}$; die von W ist $\frac{W}{g}$ und diese auf den Umfang reducirt $\frac{W}{2g}$ nach §. 227. Daher sind sämmtliche auf den Umfang reducirte Massen $\left(\frac{P}{g} + \frac{Q}{g} + \frac{W}{2g}\right)$, demnach ist die Beschleunigung nach §. 200. 5.

$$G = \frac{P - \left[\frac{Q(r + k\delta^2)}{r} + \frac{\mu\varrho}{r}(P + Q + W)\right]}{P + Q + \frac{W}{2}} \cdot g.$$

Beispiel. Es sei $P = 30$ Pfd., $Q = 20$ Pfd., $r = 0,6$ Fuß, $\varrho = 0,05$ Fuß, $k\delta^2 = 0,025$, $W = 4$ Pfd., $\mu = 0,1$. Setzt man diese Werthe in obige Gleichung, so erhält man für $g = 32,696$ die Beschleunigung $G = 5,442$ Fuß.

§. 235.

Bewegung bei der Radwelle. Bei dem Rad an der Welle, Fig. 186, sei R der Radius des Rades, r der der Welle, ϱ der des Zapfens, μ der Reibungscoefficient. Am Umfang des Rades hänge ein Gewicht P, am Umfang der Welle ein Gewicht Q. Das Gewicht des Rades sei W, das der Welle W'. Man soll die Bewegung der Gewichte P und Q bestimmen?

Aufl. Für den Zustand des Gleichgewichts ist $P.R = Q.r + \mu\varrho\,(P + Q + W + W')$. Soll nun Bewegung eintreten, so muß stattfinden $P.R > Qr + \mu\varrho\,(P + Q + W + W')$. Die Kräfte auf den Punkt A am Umfange des Rades reducirt, sind: $P, \frac{Qr}{R}, \frac{\mu\varrho}{R}(P + Q + W + W')$. Davon wirken die beiden letztern der ersten entgegen, daher ist die bewegende Kraft oder Ueberwucht $P - \frac{Qr + \mu\varrho\,(P + Q + W + W')}{R}$. Die trägen Massen sind $\frac{P}{g}, \frac{Q}{g}, \frac{W}{g}, \frac{W'}{g}$. Man reducire sämmtliche Massen auf den Punkt A. Die Masse $\frac{Q}{g}$ reducirt, gibt für diesen Punkt eine Masse $\frac{Qr^2}{gR^2}$. Ist $\frac{Wx^2}{g}$ das Trägheitsmoment des Rades, so ist die reducirte Masse desselben $\frac{Wx^2}{g.R^2}$, ist das der Welle $\frac{W'y^2}{g}$, so ist die in A entsprechende Masse desselben $\frac{W'y^2}{gR^2}$. Demnach ist die auf den Punkt A reducirte Gesammtmasse gleich $\frac{P}{g} + \frac{Qr^2}{gR^2} + \frac{Wx^2}{gR^2} + \frac{W'y^2}{gR^2}$. Die dem Gewichte P entsprechende Beschleunigung G erhält man aber, wenn man die bewegende Kraft durch die bewegte Masse dividirt, also wird nach einiger Reduction

$$G = \frac{P.R - [Qr + \mu\varrho\,(P + Q + W + W')]}{P.R^2 + Qr^2 + Wx^2 + W'y^2}\,.\,R\,.\,g \ldots 1.$$

Ist G′ die Beschleunigung des Gewichtes Q, so hat man

$$G' : G = r : R$$

$$G' = \frac{G.r}{R} \ldots . 2.$$

Beispiel. Es sei $P = 80$ Pfd.; $Q = 200$ Pfd.; $R = 2{,}4$ Fuß; $r = 0{,}5$; $\varrho = 0{,}1$; $\mu = 0{,}1$; $W = 60$ Pfd.; $W' = 30$ Pfd. Das Rad bestehe aus einem Radkranze, dessen beide Radien 2,4 und 2,1 Fuß seien und aus Radarmen, die wir unberücksichtigt lassen wollen. Die Welle sei massiv. Es ist nun das Trägheitsmoment des Radringes $Wx^2 = W\frac{(r'^2 + r''^2)}{2} = 60\,\frac{(2{,}4^2 + 2{,}1^2)}{2} = 305{,}1$; für die Welle ist $W'y^2 = \frac{W'r'^2}{2} = \frac{30\,.\,0{,}5^2}{2} = 3{,}75$. Setzt man sämmtliche Werthe in Gl. 1, so erhält man die Beschleinigung von P.

$$G = \frac{80\,.\,2{,}4 - [200\,.\,0{,}5 + 0{,}1\,.\,0{,}1\,(80 + 200 + 60 + 30)]}{80\,.\,2{,}4^2 + 200\,.\,0{,}5^2 + 305{,}1 + 3{,}75}\,.\,2{,}4\,.\,32{,}696$$

$G = 8{,}453$ Fuß.

§. 236.

Bewegung bei einem einfachen Rollenzug. Die Rollenverbindung, Fig. 100, bestehe aus einer festen und einer freien

Rolle. An letzterer hänge ein Gewicht Q und am Ende des über die erste geschlungenen Seiles ein Gewicht P. Das Gewicht der festen Rolle sei W, der freien W′, der Radius der ersten sei r, der andern r′. Angenommen, das Gewicht P bewege sich um s abwärts, so bewegt sich $Q + W'$ um $\frac{s}{2}$ aufwärts. Die durch diese Gewichte verrichtete Arbeitsgröße ist daher $Ps - (Q + W')\frac{s}{2}$. Man reducire nun sämmtliche Massen an den Umfang der festen Rolle. Die Masse von P ist $\frac{P}{g}$ die von W ist $\frac{W}{g}$ und ihr Trägheitsmoment sei $\frac{Wx^2}{g}$, dann ist die auf den Umfang reducirte Masse $\frac{Wx^2}{gr^2}$. Die Masse der freien Rolle ist $\frac{W'}{g}$, ihr Trägheitsmoment $\frac{W'x^2}{gr'^2}$. Die Masse von $Q + W'$ ist $\frac{Q + W'}{g}$. Bei dieser Bewegung habe die feste Rolle die Umfangsgeschwindigkeit v, dann ist die der freien Rolle $\frac{v}{2}$. Bildet man nun die Summe der lebendigen Kräfte sämmtlicher bewegten Massen, so erhält man die entsprechende Arbeitsgröße derselben:

$$\frac{Pv^2}{2g} + \frac{Wx^2 . v^2}{2gr^2} + \frac{(Q + W')}{2g} . \left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{W'x'^2}{2gr'^2} . \left(\frac{v}{2}\right)^2.$$

Man hat daher die Gleichung:

$$\left[P - \frac{(Q + W)}{2}\right] s = \left(P + \frac{Wx^2}{r^2} + \frac{(Q + W)}{4} + \frac{W'x'^2}{4r'^2}\right) . \frac{v^2}{2g}.$$

Es sei G die dem Gewichte P entsprechende Beschleunigung, so ist bekanntlich $G = \frac{v^2}{2s}$. Man erhält daher aus obiger Gleichung $\frac{v^2}{2s}$ oder:

$$G = \frac{G - \frac{Q + W'}{2}}{P + \frac{Wx^2}{r^2} + \frac{Q + W'}{4} + \frac{W'x'^2}{4r'^2}} . g.$$

Für die Beschleunigung G′ des steigenden Gewichts ist

$$G' = \frac{G}{2}.$$

Beispiel. Es sei P = 50 Pfd., Q = 80 Pfd., W = 8 Pfd., W′ = 6 Pfd., r = 0,3′; r′ = 0,3′. Für die massiven Rollen hat man $\frac{Wx^2}{r^2} = \frac{8 . (0,3)^2}{2 . (0,3)^2} = 4$; $\frac{W'x'^2}{4 . r'^2} = \frac{6 . (0,3)^2}{2 . 4 . (0,3)^2} = \frac{3}{4}$. Substituirt man sämmtliche Werthe in obige Gleichung, so erhält man

$$G = \frac{50 - \left(\frac{80 + 6}{2}\right)}{50 + 4 + \frac{80 + 6}{4} + \frac{3}{4}} . 32{,}696 = 3 \text{ Fuß}.$$

$$G' = \frac{3}{2} = 1{,}5 \text{ Fuß}.$$

§. 237.

Hauptträgheitsmomente. Ein Körper ist in Bezug auf drei rechtwinkelige Coordinatenaxen gegeben. Die Trägheitsmomente in Beziehung auf diese drei Axen sind bekannt. Es handelt sich nun darum, das Trägheitsmoment dieses Körpers in Bezug auf irgend eine Axe zu finden, die durch den Ursprung der Coordinaten geht.

Es seien, Fig. 187, Ax, Ay, Az die Coordinatenaxen, AB die Drehaxe, α, β, γ die Winkel, welche sie mit den Coordinatenaxen bildet. C sei ein Element des Körpers, m dessen Masse und x, y, z die Coordinaten desselben, $AC = r$, Winkel $BAC = \delta$. Fällt man von C auf die Drehaxe AB das Perpendikel $CD = r \sin \delta$, so ist das Trägheitsmoment des Massenelementes gleich $mr^2 \sin^2 \delta = mr^2 (1 - \cos^2 \delta)$. Es ist aber bekanntlich

$$\cos \delta = \cos CAx . \cos \alpha + \cos CAy . \cos \beta + \cos CAz . \cos \gamma.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit r und setzt alsdann

$$r \cos CAx = x,\ r . \cos CAy = y,\ r . \cos CAz = z,$$

so erhält man:

$$r \cos \delta = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma.$$

Quadrirt man diese Gleichung und zieht dann diesen Werth von $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ab, so erhält man:

$$r^2 (1 - \cos^2 \delta) = x^2 \sin^2 \alpha + y^2 \sin^2 \beta + z^2 \sin^2 \gamma - 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2xz \cos \alpha \cos \gamma - 2yz \cos \beta \cos \gamma.$$

Hiernach erhält man das Trägheitsmoment des ganzen Körpers:

$$\mathfrak{M} = \sin^2 \alpha \Sigma mx^2 + \sin^2 \beta \Sigma my^2 + \sin^2 \gamma \Sigma mz^2 - 2 \cos \alpha \cos \beta \Sigma mxy - 2 \cos \alpha \cos \gamma \Sigma mxz - 2 \cos \beta \cos \gamma \Sigma myz.$$

Wenn nun die Axen so gewählt werden, daß die Ausdrücke Σmxy, Σmxz, Σmyz, welche man die geometrischen Momente nennt, gleich Null werden, so folgt

$$\mathfrak{M} = \sin^2 \alpha \Sigma mx^2 + \sin^2 \beta \Sigma my^2 + \sin^2 \gamma \Sigma mz^2.$$

Sind A, B, C die bekannten Trägheitsmomente des Körpers in Bezug auf die Axen Ax, Ay, Az, dann ist:

$$A = \Sigma m (y^2 + z^2) = \Sigma my^2 + \Sigma mz^2$$
$$B = \Sigma m (x^2 + z^2) = \Sigma mx^2 + \Sigma mz^2$$
$$C = \Sigma m (x^2 + y^2) = \Sigma mx^2 + \Sigma my^2.$$

Daraus ergibt sich:

$$\Sigma mx^2 = \frac{1}{2} (B + C - A)$$

$$\Sigma my^2 = \frac{1}{2} (A + C - B)$$

$$\Sigma mz^2 = \frac{1}{2} (A + B - C).$$

Daher folgt:

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2}\sin^2\alpha\,(B + C - A) + \frac{1}{2}\sin^2\beta\,(A + C - B) + \frac{1}{2}\sin^2\gamma\,(A + B - C)$$

$$= A . \frac{1}{2}(\sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\alpha) + B . \frac{1}{2}(\sin^2\alpha + \sin^2\gamma - \sin^2\beta) + C . \frac{1}{2}(\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma).$$

Aus der Gleichung $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ folgt:

$$\cos^2\alpha = 1 - \cos^2\beta - \cos^2\gamma = \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 1$$
$$= \sin^2\beta + \sin^2\gamma - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha),$$

und daraus $2\cos^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\alpha$; also

$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(\sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\alpha)$. Ebenso erhält man

$$\cos^2\beta = \frac{1}{2}(\sin^2\alpha + \sin^2\gamma - \sin^2\beta);$$

$$\cos^2\gamma = \frac{1}{2}(\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma).$$

Somit $\mathfrak{M} = A . \cos^2\alpha + B . \cos^2\beta + C . \cos^2\gamma$.

Die Axen, für welche die geometrischen Momente gleich Null sind, werden die Hauptaxen genannt, und es lassen sich für Punkte eines Körpers drei rechtwinkelige Coordinatenaxen finden, welche diese Eigenschaft haben. Die Trägheitsmomente in Bezug auf diese Axen heißen Hauptträgheitsmomente. Sind also die Hauptträgheitsmomente bekannt, so läßt sich durch obige Formel das Trägheitsmoment für jede beliebige Axe finden, die durch den Ursprung der Coordinaten geht.

Es läßt sich auch nachweisen, daß eines dieser Hauptträgheitsmomente ein Maximum, das andere ein Minimum, das dritte keines von beiden ist in Bezug auf jede andere durch denselben Anfangspunkt der Coordinaten gehende Axe.

Da das Trägheitsmoment für eine durch den Schwerpunkt gehende Axe kleiner ist, als für jede parallele Axe, so ist das kleinste der Hauptträgheitsmomente in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehenden Hauptaxen kleiner, als alle andern Trägheitsmomente in Bezug auf irgend eine Axe.

Fünftes Kapitel.

Von der Centrifugalkraft.

§. 238.

Wenn ein Körper eine gewisse Geschwindigkeit besitzt und es wirkt auf ihn eine constante Kraft, deren Richtung beständig durch

einen fixen Punkt außerhalb der Bewegungsrichtung geht, so nennt man die hierdurch resultirende krummlinige Bewegung des Körpers eine Centralbewegung. Der fixe Punkt heißt der Centralpunkt. Die Kraft, mit welcher der Körper fortwährend gegen diesen Punkt hingezogen wird, heißt Centripetalkraft und diejenige, mit welcher er sich von diesem Punkte zu entfernen sucht, Centrifugal- oder Fliehkraft. Die Bewegung der Planeten um die Sonne ist eine Centralbewegung. Wird zum Beispiel ein Körper, der an dem einen Ende einer Schnur angebunden ist, um das andere befestigte Ende herumgeschwungen, so daß die Schnur fortwährend gespannt ist, so wird er sich in einem Kreise bewegen müssen. Hierbei wird die Schnur durch die bewegte Masse mit einer gewissen Kraft gespannt werden, oder es wirkt hierbei vom Centrum gegen die Peripherie hin eine gewisse Kraft, welche eben Centrifugalkraft genannt wird. Die Kraft, mit welcher ihn die Schnur hält und ihn beständig von seiner tangentialen Richtung ablenkt, die Spannung der Schnur ist hier die Centripetalkraft. Da Wirkung und Gegenwirkung stets einander gleich sind, so müssen auch Centripetalkraft und Centrifugalkraft einander gleich sein.

Bewegt sich ein Körper in einer kreisförmigen Rinne mit einer gewissen Geschwindigkeit, so übt er fortwährend einen Druck radial auswärts gegen dieselbe aus, welcher die Centrifugalkraft ist. Bei Bewegung der Körper um feste Axen, z. B. bei Maschinen, üben die Centrifugalkräfte der Massentheile einen radialen Druck auf die Axen aus.

Die Bewegungsrichtung ist immer tangential zur Bahn, und wenn der Körper plötzlich frei würde, so würde er sich in der Richtung der Tangente mit seiner erlangten Geschwindigkeit fortbewegen.

§. 239.

Bestimmung der Centrifugalkraft eines materiellen Punktes. Ein materieller Punkt von der Masse M und dem Gewichte Q sei gezwungen, sich in der Peripherie eines Kreises, Fig. 188, mit der Geschwindigkeit v gleichförmig zu bewegen. In einem gewissen Augenblick befinde er sich in A. Er ist nun zwei Kräften unterworfen, die eine treibt ihn nach der Richtung der Tangente, die andere zieht ihn beständig gegen den Mittelpunkt des Kreises. Könnte er der erstern frei folgen, so würde er in einer unendlich kleinen Zeit τ nach der Tangente den Weg AB zurücklegen. Da ihn aber die Centripetalkraft stets von dieser Richtung ablenkt, so wird er sich nach dieser Zeit in dem Kreispunkte D statt in B befinden. Ist nun G die der Centripetalkraft oder Centrifugalkraft correspondirende Beschleunigung, so ist $BD = \frac{1}{2} G\tau^2$ der in dieser Zeit gegen das Centrum zurückgelegte Weg. Zieht man DE senkrecht auf AC, so kann man, da AD ein unendlich kleiner Bogen ist, AE = BD setzen. Demnach ist $AE = \frac{1}{2} G\tau^2$. Ist r der Radius des Kreises, so ist auch

$AE = \frac{AD^2}{2r}$. Der auf der Peripherie zurückgelegte Weg ist $AD = v\tau$, also $AD^2 = v^2 . \tau^2$; somit ist $\frac{1}{2} G\tau^2 = \frac{v^2 . \tau^2}{2r}$, also die Centrifugalbeschleunigung: $G = \frac{v^2}{r} \; . . . \; 1.$

Ist u die Winkelgeschwindigkeit, so hat man $v = ru$, daher auch

$$G = ru^2 \; . . . \; 2.$$

Sei nun F die Centrifugalkraft, so ist $F = MG$, daher

$$F = \frac{Mv^2}{r} = \frac{Qv^2}{rg} \; . . . \; 3.$$

Die Centrifugalkraft ist also direct proportional der Masse, dem Quadrate der Geschwindigkeit und umgekehrt proportional dem Radius.

Bezeichnet T die Umlaufszeit, so ist der in dieser Zeit zurückgelegte Weg $= vT$. Dieser ist aber gleich der Peripherie des Kreises, demnach hat man: $vT = 2r\pi$

$$v = \frac{2r\pi}{T}.$$

Setzt man diesen Werth für v in vorige Gleichung, so wird

$$F = \frac{4r\pi^2 . M}{T^2} = \frac{4r\pi^2 . Q}{gT^2} \; . . . \; 4.$$

Ist ferner n die Anzahl der Umdrehungen in der Secunde, so wird $T = \frac{1}{n}$, daher erhält man

$$F = 4r\pi^2 n^2 M = \frac{4r\pi^2 n^2 . Q}{g} \; . . . \; 5.$$

Wenn h die zu v gehörige Geschwindigkeitshöhe bedeutet, so ist $v^2 = 2gh$ und man erhält daher auch aus 3

$$F = \frac{2Q . h}{r}$$

$$F : Q = 2h : r$$

d. h. die Centrifugalkraft verhält sich zum Gewicht des Körpers wie die doppelte Geschwindigkeitshöhe zum Radius des Kreises.

Aufg. 1. Ein Körper von 40 Pfd. Gewicht bewegt sich in der Peripherie eines Kreises von 60 Fuß Radius mit 20 Fuß Geschwindigkeit, welches ist seine Centrifugalkraft?

Aufl. Es ist nach Gl. 3 $Q = 40$, $v = 20$, $r = 60$, also

$$F = \frac{40 . 20^2}{60 . 32{,}696} = 8{,}155 \text{ Pfd.}$$

Aufg. 2. Eine in C drehbare Stange, Fig. 189, trägt an den Enden A und B die Massen M, M′. Wie müssen sich die Entfernungen $AC = a$ und $BC = b$ derselben von der Drehaxe verhalten, wenn die Drehaxe keinen Druck erleiden soll?

Aufl. Soll die Drehaxe keinen Druck erleiden, so müssen die Centrifugalkräfte beider Massen einander gleich sein. Sind F, F′ die Centrifugalkräfte der Massen M und M′, so hat man nach Gl. 4, da die Umlaufszeit T für beide gleich ist, $F = \frac{4a\pi^2 M}{T^2}$, $F' = \frac{4b\pi^2 M'}{T^2}$, und da F = F′, so folgt:

$$\frac{4a\pi^2 M}{T^2} = \frac{4b\pi^2 M'}{T^2}$$

$$Ma = M'b$$

$$a:b = M':M$$

d. h. die Entfernungen von der Drehaxe müssen sich umgekehrt verhalten wie die Massen.

Aufg. 3. An dem Ende einer 10 Fuß langen Eisenstange, welche bei 4000 Pfd. abreißt, befindet sich eine 100 Pfd. schwere Kugel. Wie viele Umdrehungen muß dieselbe in der Secunde machen, bis die Stange zerreißt?

Aufl. Nach Gl. 5 ist r = 10, Q = 100, F = 4000, π = 3,14. Es ergibt sich, wenn n gesucht wird, n = 1,821 Umdrehungen.

§. 240.

Centrifugalkraft bei der Rotation der Erde. Die Schwerkraft wird durch die Centrifugalkraft der Erde vermindert. Sei Fig. 190 A irgend ein Punkt der Erdoberfläche, AB = r′ der Radius des dazu gehörigen Parallelkreises, φ seine geographische Breite, F′ die daselbst stattfindende Centrifugalkraft für eine Masse M = 1, F die Centrifugalkraft am Aequator gD für dieselbe Masse, r der Erdradius der Erdkugel, T die Umdrehungszeit der Erde. Nun ist nach vorigem § $F = \frac{4\pi^2 . r}{T^2}$, $F' = \frac{4\pi^2 r'}{T^2}$; da aber AB = r′ = r cos φ, so ist $F' = \frac{4\pi^2 r . \cos\varphi}{T^2}$. Macht man nun AF = F′ und zerlegt diese Kraft in zwei rechtwinkelige Seitenkräfte AE und AD nach der Richtung des Radius und normal darauf, so ist erstere diejenige Kraft, welche der Schwerkraft direct entgegenwirkt, die letztere hat hierauf keinen Einfluß. Nun ist aber AE = AF . cos φ = F′ . cos φ = F″, also $F'' = \frac{4\pi^2 r . \cos^2\varphi}{T^2}$. Es folgt daher

$$F:F'' = \frac{4\pi^2 r}{T^2} : \frac{4\pi^2 r . \cos^2\varphi}{T^2} = 1:\cos^2\varphi.$$

$$F'' = F \cos^2\varphi.$$

Hieraus geht hervor, daß die der Schwerkraft entgegenwirkenden Centrifugalkräfte sich verhalten wie die Quadrate der Cosinusse der geographischen Breiten.

Denken wir uns die Erde in flüssigem Zustande, so ist eine noth-

wendige Folge, daß die tangentiale Seitenkraft der Centrifugalkraft auf den verschiedenen Parallelkreisen ein Anhäufen der Massentheile gegen den Aequator hin bewirkt. Es ist daher erklärlich, daß die Erde an den Polen abgeplattet sein und eine sphäroidische Gestalt haben muß.

Ist Q das Gewicht eines Körpers unter dem Aequator, $r = 6376931$ Mtr. der Erdradius, die Erde als Kugel angesehen, $g = 9{,}7806$ Mtr. die Beschleunigung der Schwere daselbst, $T = 86164$ Secunden die Umdrehungszeit der Erde, $\pi = 3{,}1416$, so findet man durch Substitution in die Formel 4 des vorigen § $F = \frac{Q}{289}$. Hiernach ist die Centrifugalkraft $\frac{1}{289}$ des Gewichtes des Körpers. Da nun $289 = 17^2$ ist, so folgt, daß die Centrifugalkraft unter dem Aequator der Schwerkraft oder dem Gewichte gleich würde, wenn sich die Erde 17mal schneller bewegte, als sie sich wirklich bewegt, oder wenn die Umdrehungszeit den 17ten Theil der wirklichen betrüge. In diesem Falle würde also ein Körper am Aequator weder frei zur Erde fallen, noch sich von ihr entfernen.

Es sei x der Druck, den der Körper auf seine Unterlage ausüben würde, im Falle die Drehbewegung der Erde nicht stattfände, so ist $x = Q + \frac{Q}{289}$, also $Q = \frac{289}{290}.x$. Daraus folgt, daß das Gewicht des Körpers um $\frac{1}{290}$ kleiner ist, als wenn keine Centrifugalkraft vorhanden wäre. Ein Körper, der also an dem Aequator einen Druck von 289 Kilgr. auf seine Unterlage ausübt, wird an den Polen einen Druck von 290 Kilgr. ausüben.

§. 241.

Centrifugalkraft eines Massensystems. Wir wollen annehmen, ein fester Körper drehe sich um eine Axe Az, Fig. 191. Ein Punkt A dieser Axe sei der Ursprung dreier rechtwinkeligen Coordinatenaxen Ax, Ay, Az, wovon letztere mit der Drehaxe zusammenfalle. M sei irgend ein Punkt dieses Körpers, m' seine Masse, $MH = r'$ die Entfernung desselben von der Drehaxe, x', y', z' seine Coordinaten, v' seine wirkliche, u seine Winkelgeschwindigkeit, f die Centrifugalkraft. Letztere wirkt nun radial auswärts von H gegen M und ist $f = \frac{m'v^2}{r'} = m'r'u^2$. Diese Kraft kann man nun in H angreifend denken und sie da in zwei rechtwinkelige Seitenkräfte X', Y' parallel den Axen Ax, Ay zerlegen. Ist α der Winkel, den die Richtung der Centrifugalkraft mit der Seitenkraft X' bildet, so erhält man:

$$X' = m'r'u^2 \cos\alpha = m'u^2r' . \frac{x'}{r'} = m'u^2x'$$

$$Y' = m'r'u^2 \sin\alpha = m'u^2r' . \frac{y'}{r'} = m'u^2y'.$$

Zerlegt man die Centrifugalkräfte sämmtlicher Massenelemente auf

gleiche Weise in zwei Seitenkräfte parallel den Axen Ax, Ay, so erhält man zwei Systeme von parallelen Kräften, das eine in der Ebene xz, das andere in der Ebene yz. Die Mittlere des ersten Systems sei X, die des andern Y. Man wird dann haben

$$X = u^2 \Sigma mx$$
$$Y = u^2 \Sigma my.$$

Die Abstände der materiellen Punkte von der Ebene xy seien $z', z'', z''' \ldots$, die Entfernungen der Angriffspunkte der Kräfte X, Y vom Ursprung der Coordinaten a, b. Sodann hat man die Gleichungen:

$$X.a = m'u^2x'z' + m''u^2x''z'' + m'''u^2x'''z''' + \ldots = u^2 \Sigma mxz$$
$$Y.b = m'u^2y'z' + m''u^2y''z'' + m'''u^2y'''z''' + \ldots = u^2 \Sigma myz.$$

Hieraus ergeben sich die Angriffspunkte der Kräfte X und Y also:

$$a = \frac{u^2 \Sigma mxz}{X} = \frac{u^2 \Sigma mxz}{u^2 \Sigma mx} = \frac{\Sigma mxz}{\Sigma mx}$$
$$b = \frac{u^2 \Sigma myz}{Y} = \frac{u^2 \Sigma myz}{u^2 \Sigma my} = \frac{\Sigma myz}{\Sigma my}.$$

Man hat somit folgende Gleichungen:

$$X = u^2 \Sigma mx \ldots 1.$$
$$Y = u^2 \Sigma my \ldots 2.$$
$$a = \frac{\Sigma mxz}{\Sigma mx} \ldots 3.$$
$$b = \frac{\Sigma myz}{\Sigma my} \ldots 4.$$

Es lassen sich also sämmtliche Centrifugalkräfte eines sich gleichförmig um eine beliebige Axe drehenden Körpers im Allgemeinen auf zwei Kräfte zurückführen, die in verschiedenen Ebenen liegen und an verschiedenen Punkten der Drehaxe angreifen.

§. 242.

Wenn die Richtungen der Kräfte X und Y in derselben zur Drehaxe normalen Ebene liegen, oder wenn $a = b$ wird, dann schneiden sich die beiden Kräfte in einem Punkt und können demnach in eine einzige Kraft F vereinigt werden. In diesem Falle ist die resultirende Centrifugalkraft

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = u^2 \sqrt{(\Sigma mx)^2 + (\Sigma my)^2}.$$

Sei M die Masse des ganzen Körpers oder Massensystems x, y, die Coordinaten seines Schwerpunktes in Bezug auf die Coordinatenebenen yz, xz, so ist bekanntlich

$$Mx = \Sigma mx, \ My = \Sigma my.$$

Somit folgt auch

$$F = u^2 M \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ist r der Abstand des Schwerpunktes von der Drehaxe, so ist $\sqrt{x^2 + y^2} = r$, sonach die Centrifugalkraft

$$F = u^2 Mr.$$

Zur Bestimmung des Winkels α, welchen diese Kraft mit der Ebene xz bildet, hat man

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{My}{Mx} = \frac{y}{x}.$$

Hieraus folgt: Die Richtung der Centrifugalkraft geht durch den Schwerpunkt des Körpers oder Systems und ihre Intensität ist genau so groß, als wenn die sämmtlichen Massenelemente im Schwerpunkt vereinigt wären.

Werden zugleich $a = 0$ und $b = 0$, dann fallen die Richtungen der Kräfte X und Y in die Ebene xy und man erhält für die resultirende Centrifugalkraft und ihre Richtung dieselben Gleichungen wie im vorigen Fall. Es wird hier $\Sigma mxz = 0$ und $\Sigma myz = 0$, woraus folgt, daß der Körper in Bezug auf die Ebenen xz und yz eine symmetrische Form hat.

Wenn sich die Schwerpunkte sämmtlicher Elemente, in die sich ein Körper durch Schnitte normal auf die Drehaxe zerlegen läßt, in einer Ebene befinden, z. B. der Ebene xz, so wird $Y = 0$ und $b = 0$ und man erhält für die Centrifugalkraft denselben Ausdruck wie oben. Ihr Angriffspunkt ist bestimmt durch

$$a = \frac{\Sigma mxz}{\Sigma mx}.$$

Ein gleiches Resultat ergibt sich, wenn sämmtliche Schwerpunkte in die Ebene yz fallen oder wenn $X = 0$ und $a = 0$ wird.

Fallen die Schwerpunkte sämmtlicher Scheiben oder Elemente in eine zur Drehaxe parallelen Linie, dann sind die Entfernungen dieser Schwerpunkte von der Drehaxe alle gleich. Die Centrifugalkraft ergibt sich auf gleiche Weise wie oben. Der Abstand c ihres Angriffspunktes von der Ebene xy ergibt sich durch

$$c = \frac{\Sigma mxz}{\Sigma mx} = \frac{x\Sigma mz}{x\Sigma m} = \frac{\Sigma mz}{\Sigma m}.$$

Fällt diese Linie nicht in eine der Coordinatenebenen, so bleiben diese Gleichungen dennoch dieselben, da für alle Schwerpunkte $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ ist.

Wenn also die Schwerpunkte sämmtlicher Elemente in eine zur Drehaxe parallele Axe fallen, so ist die Centrifugalkraft gleich der auf den Schwerpunkt reducirten Gesammtmasse und ihr Angriffspunkt fällt mit dem des Schwerpunktes zusammen.

Aufg. Man soll die Centrifugalkraft eines Kegels bestimmen, dessen Axe in einer Ebene mit der Umdrehungsaxe liegt.

Aufl. Es sei, Fig. 192, zz die Drehaxe, $BE = h$ die Höhe des Kegels, S sein Schwerpunkt, $SD = r$ der Abstand des Schwerpunktes von der Drehaxe, α der Neigungswinkel der Axe des Kegels gegen die Drehaxe, $BC = a$ der Abstand der Spitze B des Kegels von der Drehaxe, γ das Gewicht einer Kubikeinheit der Masse, r' der Radius des Kegels. Man hat nun die Formel $F = u^2 Mr$. Hier

ist $M = \frac{h}{3} \frac{r'^2 \pi \gamma}{g}$; $r = a + \frac{3}{4} h \sin \alpha$, also $F = \frac{u^2 . h r'^2 \pi \gamma}{3g}$. $\left(a + \frac{3}{4} h \sin \alpha\right)$.

§. 243.

Freie Axen. Wir haben bisher die Centrifugalkraft und somit den Druck bestimmen lernen, welchen die Drehaxe durch diese Kraft erleidet. In vielen Fällen der Technik ist es jedoch wünschenswerth, die Massen so anzuordnen, daß die Drehaxe keinen Druck erleide. Eine solche Drehaxe, welche bei der Drehung eines Körpers durch die Centrifugalkräfte keinen Druck erleidet, heißt eine freie Axe des Körpers.

Aus den Gleichungen §. 241 lassen sich die Bedingungen, unter welchen eine Drehaxe eine freie wird, ableiten. Soll eine solche Axe eine freie werden, so müssen offenbar $X = 0$ und $Y = 0$ sein, oder $\Sigma mx = Mx = 0$ und $\Sigma my = My = 0$. Da aber M nicht $= 0$ sein kann, so muß $x = 0$ und $y = 0$ sein. Ferner müssen die statischen Momente von jedem der beiden Systeme Null sein. Man erhält daher folgende Bedingungsgleichungen:

$$0 = \Sigma mx \quad . \; . \; . \; 1.$$
$$0 = \Sigma my \quad . \; . \; . \; 2.$$
$$0 = \Sigma mxz \; . \; . \; . \; 3.$$
$$0 = \Sigma myz \; . \; . \; . \; 4.$$

Hieraus ergibt sich: Jede freie Axe muß durch den Schwerpunkt des Massensystems gehen (Gl. 1 und 2).

Ferner: Nicht jede durch den Schwerpunkt des Systems gehende Axe ist eine freie Axe, sondern nur diejenigen Axen, welche zugleich Hauptaxen sind (Gl. 3 und 4).

Da nun jeder Körper drei im Schwerpunkte rechtwinkelig sich schneidende Hauptaxen hat, so gibt es für jeden Körper wenigstens drei freie Axen.

Jeder Durchmesser einer Kugel ist eine freie Axe. Bei einem Rotationskörper, der durch Umdrehung einer ebenen Fläche um eine Axe erzeugt wurde, ist diese Axe eine der freien Axen. Die andern freien Axen sind Durchmesser dieses Körpers und es ist jeder zur Axe normale Durchmesser, der den Schwerpunkt enthält, eine freie Axe.

Beim Rad an der Welle, bei Wasserrädern sollen die geometrischen Umdrehungsaxen freie Axen sein, damit durch die Centrifugalkraft kein Druck auf die Zapfenlager ausgeübt werde.

Bei einem von lauter Rechtecken begrenzten Parallelepipedon sind die drei durch den Schwerpunkt gehenden und auf den Seitenflächen normal stehenden Linien freie Axen.

Sechstes Kapitel.

Von der Bewegung eines Körpers auf schiefen Ebenen und krummen Flächen.

§. 244.

Bewegung auf einer schiefen Ebene. Es sei Q das Gewicht eines auf einer schiefen Ebene liegenden Körpers, α der Neigungswinkel derselben. Man zerlege das Gewicht in zwei rechtwinkelige Seitenkräfte normal und parallel zur schiefen Ebene. Die erstere $Q \cos \alpha$ wird von dem Widerstand der Ebene aufgehoben und hat, da vor der Hand die Reibung unberücksichtigt bleiben soll, auf die Bewegung keinen Einfluß. Die letztere, $Q \sin \alpha$, oder die relative Schwere ist die Kraft, welche den Körper längs der schiefen Ebene abwärts treibt. Ist die ihr correspondirende Beschleunigung G, so hat man, da Q das bewegte Gewicht der Masse ist:

$$G = \frac{Q \sin \alpha}{Q} . g = g \sin \alpha.$$

Diesen Werth hat man in die Gleichungen des § für G zu substituiren. Geht der Körper vom Zustande der Ruhe aus, so hat man:

$$v = gt \sin \alpha \;.\;.\;.\; 1.$$

$$s = \frac{1}{2} gt^2 \sin \alpha \;.\;.\;.\; 2.$$

$$v^2 = 2gs . \sin \alpha \;.\;.\;.\; 3.$$

Besitzt der Körper schon eine Anfangsgeschwindigkeit V, so erhält man:

$$v = V + gt \sin \alpha \;.\;.\;.\; 4.$$

$$s = Vt + \frac{1}{2} gt^2 \sin \alpha \;.\;.\;.\; 5.$$

$$v^2 = V^2 + 2gs . \sin \alpha \;.\;.\;.\; 6.$$

Für die aufwärts gehende Bewegung wird die Beschleunigung negativ, daher erhält man für diesen Fall:

$$v = V - gt \sin \alpha \;.\;.\;.\; 7.$$

$$s = Vt - \frac{1}{2} gt^2 \sin \alpha \;.\;.\;.\; 8.$$

$$v^2 = V^2 - 2gs . \sin \alpha \;.\;.\;.\; 9.$$

Ist T die Zeit, nach welcher bei der aufwärts gehenden Bewegung die Geschwindigkeit Null wird, und S der bis dahin zurückgelegte Weg, so findet man:

$$T = \frac{V}{g \sin \alpha} \;.\;.\;.\; 10.$$

$$S = \frac{V^2}{2g \sin \alpha} \;.\;.\;.\; 11.$$

§. 245.

Um die Gleichungen mit Rücksicht auf die Reibung herzuleiten, sei μ der Reibungscoefficient, alsdann ist $\mu Q \cos \alpha$ die Reibung oder diejenige Kraft, welche der relativen Schwere $Q \sin \alpha$ entgegenwirkt. Die den Körper bewegende Kraft oder die Ueberwucht ist daher $Q (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$; demnach ist die correspondirende Beschleunigung:

$$G = \frac{Q (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{Q} . g = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

Für die Bewegung abwärts ohne Anfangsgeschwindigkeit hat man daher die Gleichungen:

$$v = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) . t \ldots 1.$$

$$s = \frac{1}{2} g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) t^2 \ldots 2.$$

$$v^2 = 2g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) s \ldots 3.$$

Ist eine Anfangsgeschwindigkeit V vorhanden, so ergibt sich:

$$v = V + g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) t \ldots 4.$$

$$s = Vt + \frac{1}{2} g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) t^2 \ldots 5.$$

$$v^2 = V^2 + 2g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) . s \ldots 6.$$

Für die Bewegung aufwärts ist die Beschleunigung $= - g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$, daher:

$$v = V - g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) t \ldots 7.$$

$$s = Vt - \frac{1}{2} g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) t^2 \ldots 8.$$

$$v^2 = V^2 - 2g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) . s \ldots 9.$$

Aufg. 1. Ein Schlitten von 600 Pfund Gewicht bewegt sich mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 5 Fuß auf einer unter 20° geneigten 2000 Fuß langen Schneebahn abwärts. Mit welcher Geschwindigkeit und in welcher Zeit wird er am Fuße derselben ankommen und welche Wirkungsfähigkeit wird alsdann die Masse besitzen?

Aufl. Man findet bei dem Reibungscoefficienten $\mu = 0{,}03$ nach Gl. 6 $v^2 = 5^2 + 2 . 32{,}696 . 2000 . 0{,}3138$; $v = 202{,}6$ Fuß. Aus Gl. 5 ergibt sich $t = 18{,}38$ Sec. Ferner findet man nach §. 212 $W = 376870$ Fußpfund.

Aufg. 2. Ein Wagen von 8000 Pfd. Gewicht bewegt sich vom Zustand der Ruhe aus auf der schiefen Ebene einer Eisenbahn herab, welche eine Länge von 3000 Fuß und 4% Steigung hat. Der Reibungscoefficient sei $1/_{200}$. Wenn nur auf fortschreitende Bewegung Rücksicht genommen wird, so soll man bestimmen, mit welcher Geschwindigkeit und in welcher Zeit der Wagen am Fuße der schiefen Ebene ankommen wird und welche Wirkungsfähigkeit die Masse alsdann besitzt?

Aufl. Es ist hier $Q = 8000$; $s = 3000$; $\mu = 0{,}005$; da die Steigung 4% beträgt, so findet man: $\sin \alpha = 0{,}039972$; $\cos \alpha = 0{,}9993004$. Setzt man diese Werthe in Gl. 3, so erhält man:

$v = 82{,}22$ Fuß, und nach Gl. 2 ergibt sich $t = 72{,}4$ Sec. Nach §. 212 wird $W = 827028$ Fußpfd.

Aufg. 3. Auf zwei mit ihrer gleichen Höhe CD zusammenstoßenden schiefen Ebenen, Fig. 193, liegen die Gewichte Q und Q′, die durch ein über eine Rolle B gehendes Seil mit einander verbunden sind, man soll die Bewegungsverhältnisse bestimmen?

Aufl. Es seien die Neigungswinkel α, α', $CD = h$, μ der Reibungscoefficient. Soll nun Q herabgleiten und Q′ dadurch gehoben werden, so ist die bewegende Kraft $P = Q(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - Q'(\sin\alpha' + \mu\cos\alpha')$. Die bewegte Masse ist $Q + Q'$, daher die Beschleunigung des sinkenden Gewichts:

$$G = \frac{Q(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - Q'(\sin\alpha' + \mu\cos\alpha')}{Q + Q'}\,.\,g.$$

Soll nun wirklich Bewegung eintreten, so muß offenbar stattfinden $Q(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) > Q'(\sin\alpha + \mu\cos\alpha')$ oder $\frac{Q}{Q'} > \frac{\sin\alpha' + \mu\cos\alpha'}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}$. Sucht man ebenso die Beschleunigung für das Sinken des Gewichtes Q′, so findet man, daß dieses nur dann sinken kann, wenn stattfindet $\frac{Q}{Q'} < \frac{\sin\alpha' - \mu\cos\alpha'}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}$.

Die Reibung wird also jede Bewegung verhindern, so lange $\frac{Q}{Q'}$ die Grenze zwischen $\frac{\sin\alpha' + \mu\cos\alpha'}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}$ und $\frac{\sin\alpha' - \mu\cos\alpha'}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}$ nicht überschreitet.

§. 246.

Vergleichung des freien Falles mit der Bewegung auf der schiefen Ebene. Es sei, Fig. 194, $AB = s$ die Länge der schiefen Ebene, $AC = h$ die Höhe. Ein von der Ruhe ausgehender Körper bewege sich ohne Reibung in der Zeit t von A nach B und erlange in B die Geschwindigkeit v, so ist:

$$v^2 = 2gs\,.\sin\alpha.$$

Läßt man zu gleicher Zeit einen andern Körper aus A frei fallen, so sei seine in C erlangte Geschwindigkeit v′, dann ist:

$$v'^2 = 2gh.$$

Nun ist aber $s\,.\sin\alpha = h$. Demnach folgt aus diesen beiden Gleichungen: $v^2 = v'^2$ oder

$$v = v'.$$

Der Körper erlangt also beim Durchlaufen der schiefen Ebene dieselbe Endgeschwindigkeit, als wenn er die Höhe derselben frei durchfällt.

Die Zeit, in welcher der Körper von der Höhe AC frei herabfällt, sei t′, dann ist:

$$v = g\sin\alpha\,.\,t$$
$$v' = gt'.$$

Da nun $v = v'$, so folgt $g \sin \alpha \,.\, t = g t'$ oder $\frac{h}{s} t = t'$, also:

$$t' : t = h : s.$$

Die Zeit, welche ein frei fallender Körper braucht, um die Höhe zu durchfallen, verhält sich zur Zeit, die erforderlich ist zum Durchlaufen der Länge, wie die Höhe zur Länge der schiefen Ebene.

Haben zwei schiefe Ebenen $AB = s$ und $AD = s'$ dieselbe Höhe $AC = h$ und man läßt zu gleicher Zeit von A aus zwei Körper auf denselben herabgehen, so seien v und v' die von denselben in B und D erlangten Geschwindigkeiten, t und t' die zum Durchlaufen der schiefen Ebenen AB und AD verbrauchten Zeiten, α und α' die Neigungswinkel, dann ist:

$$v^2 = 2gs \,.\, \sin \alpha; \; v'^2 = 2gs' \,.\, \sin \alpha'.$$

Nun ist aber $s \,.\, \sin \alpha = h$ und $s' \,.\, \sin \alpha' = h$. Daher folgt:

$$v^2 = v'^2 \text{ oder } v = v'$$

d. h. die Körper haben am Fuße der schiefen Ebenen gleiche Geschwindigkeiten.

Ferner ist:

$$v = g \sin \alpha t; \; v' = g \sin \alpha' \,.\, t'.$$

Da aber $v = v'$, so folgt:

$$g \sin \alpha t = g \sin \alpha' \,.\, t'$$

$$\frac{h}{s} t = \frac{h}{s'} \,.\, t'$$

$$t : t' = s : s'$$

d. h. die Zeiten, in welchen die Längen der schiefen Ebenen durchlaufen werden, verhalten sich wie die Längen.

§. 247.

Es sei, Fig. 195, AC eine schiefe Ebene, AB deren Höhe. Von A aus gehen gleichzeitig zwei Körper, der eine falle frei herab und gelange in der Zeit t nach D, der andere durchlaufe in derselben Zeit die Länge der schiefen Ebene. Dann ist:

$$AD = \frac{1}{2} g t^2$$

$$AC = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $\sin \alpha$, so ist

$$AD \sin \alpha = \frac{1}{2} g \sin \alpha \,.\, t^2.$$

Demnach folgt aus den beiden letzten Gleichungen:

$$AD \sin \alpha = AC$$

$$\sin \alpha = \frac{AC}{AD}.$$

Nun ist auch $\quad \sin \alpha = \frac{AB}{AC}$

daher $$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}$$

oder $$AB : AC = AC : AD.$$

Zieht man die Linie CD, so ist noch Winkel $BAC = \sphericalangle DAC$, also $\triangle ADC \sim \triangle ABC$. Da nun $\sphericalangle ABC$ ein rechter ist, so muß auch $\sphericalangle ACD$ ein rechter sein. Es läßt sich daher über AD als Durchmesser ein Kreis beschreiben, in welchem AC eine Sehne ist.

Der Körper durchläuft daher die Länge der Sehne eines Kreises in derselben Zeit, in welcher er den verticalen Durchmesser frei durchfällt.

Demnach werden alle Sehnen des Kreises, die vom obersten Ende des verticalen Durchmessers aus gezogen werden, in gleicher Zeit oder isochron durchlaufen.

§. 248.

Bewegung auf zusammenhängenden schiefen Ebenen. Es seien Fig. 196 FC, FG, GA zusammenhängende schiefe Ebenen, welche unter den Winkeln α, α', α'' . . . gegeneinander geneigt seien. AB sei horizontal, CB vertical. Vom Punkte C aus bewege sich ein materieller Punkt ohne Anfangsgeschwindigkeit und erlange in den Punkten F, G, A die Geschwindigkeiten v, v', v''. Zieht man die Linien FG, GE parallel zu AB, so ist

$$v = \sqrt{2gCD} \;. \;. \;. \; 1.$$

Um nun die Geschwindigkeit zu bestimmen, mit welcher der Körper von F aus auf FG weiter geht, zerlege man v in zwei Seitengeschwindigkeiten normal und parallel zu FG. Erstere $v . \sin \alpha$ wird durch die feste Ebene vernichtet, letztere $v . \cos \alpha$ ist die Anfangsgeschwindigkeit auf der schiefen Ebene FG. Der in F entstandene Geschwindigkeitsverlust ist daher:

$$v - v \cos \alpha = v\ (1 - \cos \alpha) = 2v \sin \frac{1}{2} \alpha^2.$$

Zur Bestimmung der Endgeschwindigkeit auf FG hat man die Gleichung:

$$v = \sqrt{V^2 + 2gs . \sin \alpha}$$

hier ist aber $V = v \cos \alpha$; $s = FG$; $\sin \alpha = \frac{DE}{FG}$; daher die Endgeschwindigkeit in G:

$$v' = \sqrt{v^2 \cos^2 \alpha + 2g . DE}.$$

Substituirt man v^2 aus 1, so folgt

$$v' = \sqrt{2gCD \cos^2 \alpha + 2g . DE} \;. \;. \;. \; 2.$$

Auf dieselbe Weise bestimmt man die Endgeschwindigkeit in A und man wird erhalten:

$$v'' = \sqrt{(2g . CD \cos^2 \alpha + 2g . DE) \cos^2 \alpha' + 2g . BE} \;. \;. \;. \; 3.$$

Man sieht hieraus, wie die Endgeschwindigkeiten für mehrere zusammenhängende Ebenen bestimmt werden können. Auf ähnliche Art lassen sich auch die bei dieser Bewegung verflossenen Zeiten finden.

§. 249.

Bewegung auf einer krummen Linie. Wenn ein materieller Punkt sich von C aus auf der in verticaler Ebene liegenden Kurve CA, Fig. 197, bewegt, so kann man annehmen, er bewege sich auf unendlich vielen kleinen zusammenhängenden schiefen Ebenen, den Kurvenelementen. Da diese Elemente, in die man sich die Kurve zerlegt denken kann, unendlich kein sind, so werden auch die Winkel $\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots$ mit Rücksicht auf vorigen § unendlich klein sein. Man wird daher annehmen können $\cos \alpha = \cos 0 = 1$; $\cos \alpha' = \cos 0 = 1$, u. s. w. Hiernach wird aus Gl. 3 des vorigen §:

$$v'' = \sqrt{2g\,(CD + DE + EB)} = \sqrt{2g.BC}.$$

Hieraus folgt: **Der materielle Punkt erlangt bei der Bewegung auf einer in verticaler Ebene liegenden Kurve in jedem beliebigen Punkt dieselbe Endgeschwindigkeit, als wenn er von der zugehörigen verticalen Höhe frei herabgefallen wäre.**

Wendet sich die Kurve wieder aufwärts, so wird er mit der erlangten Geschwindigkeit sich auf derselben, aber verzögert fortbewegen, und in jeder Höhe diejenige Geschwindigkeit besitzen, die dem verticalen Abstand des Punktes als freie Fallhöhe entspricht.

Unter allen möglichen Kurven, die zwischen A und C gezogen werden können, ist die Cycloide diejenige, auf welcher der Körper stets die gleiche Zeit braucht, um zum untersten Punkt zu gelangen, von welchem ihrer Punkte er auch anfangen mag, auf derselben herabzufallen. Man heißt deßhalb auch die Cycloide die Linie des gleichzeitigen Falles oder Tautochrone, Isochrone. Es läßt sich gleichfalls beweisen, daß der Körper auf dieser Linie in der kürzesten Zeit von C nach B gelange, weßhalb man auch die Cycloide die Linie der kürzesten Fallzeit oder Brachistochrone nennt.

§. 250.

Nehmen wir an, ein Körper bewege sich in einer beliebigen, nicht in verticaler Ebene liegenden Kurve AB, Fig. 197a, in Folge einer einmal in A erhaltenen Anfangsgeschwindigkeit v, ohne daß irgend eine sonstige Kraft an demselben thätig sei. Mit dieser Anfangsgeschwindigkeit würde er sich in der zu A geführten Tangente AE weiter bewegen, wenn er nicht durch die Kurve abgelenkt würde. Man ziehe nun an einem andern Punkt B der Kurve die Tangente BC, welche mit der ersten den Winkel BCA bilde, dessen Bogen für den Radius 1 gleich α sei. Man denke sich nun die Kurve in Elemente getheilt, so daß diese als gerade Linien, und somit die Kurve als Polygon betrachtet werden kann. Man denke sich ferner diese Polygonseiten verlängert, so daß jede Verlängerung mit der folgenden Seite den gleichen Winkel δ bilde. Man ziehe nun durch C mit diesen Polygonseiten die Parallellinien Cf, Ck . . ., so wird der Winkel BCE in lauter gleiche Theile getheilt, deren Anzahl n, also $\alpha =$

$n\delta$ sei. Nimmt man an, der Körper bewege sich in den Polygonseiten, so ist seine Geschwindigkeit auf AD gleich $v \cos\delta$, auf DE gleich $v \cos\delta . \cos\delta = v \cos^2\delta$ u. s. w., daher in B gleich $v \cos^n\delta$. Es ist daher der Geschwindigkeitsverlust im Ganzen $p = v(1 - \cos^n\delta)$. Nun ist

$$v(1 - \cos^n\delta) = v(1 - \cos\delta)(1 + \cos\delta, \cos^2\delta + \cos^3\delta + \ldots)$$

da aber immer $\cos\delta$, $\cos^2\delta$, ... kleiner ist als 1, so ist auch der Geschwindigkeitsverlust

$$p < v(1 - \cos\delta)(1 + 1 + 1 + \ldots)$$
$$p < v(1 - \cos\delta) . n.$$

und da $(1 - \cos\delta) = 2 \sin^2 \frac{1}{2}\delta$, so folgt auch

$$p < 2nv \sin^2 \frac{1}{2}\delta.$$

Weil aber $\sin\frac{1}{2}\delta$ kleiner als $\frac{1}{2}\delta$, so ist um so mehr

$$p < \frac{1}{2} nv\delta^2$$
$$p < \frac{1}{2} v\delta . n\delta$$
$$p < \frac{1}{2} v\delta . \alpha.$$

Ein Polygon von unendlich vielen Seiten kann nun mit der Kurve identisch betrachtet werden. Es ist daher δ unendlich klein, somit auch $\frac{1}{2} v\delta\alpha$ unendlich klein oder gleich Null. Daher folgt der Satz:

Wenn ein Körper in einer Kurve sich bewegt, so findet kein Geschwindigkeitsverlust statt, und seine Bewegung ist gleichförmig, vorausgesetzt, daß keine Kraft auf denselben wirkt.

Siebentes Kapitel.

Vom Pendel.

§. 251.

Erklärung. Man versteht im Allgemeinen unter einem Pendel jeden festen Körper von beliebiger Gestalt, welcher vermöge seiner Schwere um eine horizontale Axe schwingt. Denkt man sich eine in einer verticalen Ebene liegende feste und gewichtslose gerade Linie AC, Fig. 198, welche um die Axe C schwingen kann, und am andern Ende A einen schweren materiellen Punkt trägt, so nennt man ein solches Pendel ein einfaches oder mathematisches Pendel. Be-

steht dasselbe aber aus einem materiellen Körper oder einem System von Körpern, so nennt man dasselbe ein physisches, zusammengesetztes oder materielles Pendel. Alle wirklich bestehenden Pendel sind zusammengesetzte. Ein mathematisches Pendel besteht nur in der Idee und kann nicht ausgeführt werden. Bildet man dasselbe aus einem dünnen Faden und einer kleinen schweren Kugel, so hat man annähernd ein mathematisches Pendel.

Das Pendel kann nur dann in Ruhe sich befinden, wenn sein Schwerpunkt A und der Aufhängepunkt C in einer verticalen Linie liegen. Wird dasselbe aus dieser verticalen Lage in die Lage CD gebracht, und sich alsdann selbst überlassen, so wird es, durch die Schwere getrieben, in beschleunigter Bewegung den Bogen DA beschreiben, und in die Lage CA kommen. Vermöge der hier erlangten, der verticalen Fallhöhe EA entsprechenden Geschwindigkeit wird es sich aber verzögert weiter bewegen, auf die gleiche Höhe steigen, den Kreisbogen AB = CD beschreiben und in die Lage CB kommen, wo seine Geschwindigkeit Null sein wird. Nun wird es wieder nach A zurückfallen und nach D hinaufsteigen. So würde es sich unaufhörlich hin- und herbewegen, wenn kein Widerstand, wie Axenreibung, Luftwiderstand zu überwinden wären.

Ein solcher Hin- oder Rückgang des Pendels heißt eine Schwingung, Oscilation oder ein Pendelschlag. Die Zeit, welche das Pendel zur Vollendung einer Oscilation braucht, heißt Schwingungszeit oder Schwingungsdauer. Der Winkel ACD = ∢ ACB, um welchen sich das Pendel auf beiden Seiten von der Verticallinie erhebt, heißt der Elongationswinkel, Ausschlagwinkel, Ausschlag, und der in Gradmaß ausgedrückte Bogen DAB der Schwingungsbogen, die Schwingungsweite oder Amplitude. AC heißt die Pendellänge.

§. 252.

Schwingungszeit des einfachen Pendels. Zur Bestimmung der Schwingungszeit eines einfachen Pendels nehmen wir die Pendellänge AC = l, Fig. 199, und beschreiben mit derselben aus C den Kreisbogen DAB. Die höchste Lage, in welche das Pendel bei seiner Schwingung kommt, sei CD oder CB und die zugehörige ganze Höhe AH = b. Ueber AH als Durchmesser beschreiben wir einen Kreis HfgA, dessen Centrum k ist. Durch zwei unendlich nahe gelegene Punkte F, G des Kreisbogens AD ziehen wir auf AC die Normalen FL und GN, welche den kleinen Kreis in f und g schneiden, sodann aus den Punkten F, G, g die Perpendikel FE = h, GM, gm auf die Linien DH, FL. Der materielle Punkt erlange, während er den Bogen DF durchläuft und das Pendel von der Lage CD in die Lage CF kommt, eine Geschwindigkeit v, so ist $v = \sqrt{2gh}$. In einer unendlich kleinen Zeit τ durchlaufe er das Bogenelement FG. Die Bewegung auf diesem Element kann man füglich als eine

gleichförmige betrachten und man hat dann $FG = v.\tau = \tau \sqrt{2gh}$. Hieraus folgt das Zeitelement

$$\tau = \frac{FG}{\sqrt{2gh}} \;\ldots\; 1.$$

Nun ist aber $\triangle FCL \sim \triangle FMG$, daher $FG:GM = FC:FL$ oder $FG = \frac{GM.l}{FL}$. Ferner ist $FL = \sqrt{(2l - AL)\,AL}$, daher $FG = \frac{GM.l}{\sqrt{(2l - AL)\,AL}}$ oder da $GM = gm$, so ist auch $FG = \frac{gm.l}{\sqrt{(2l - AL)\,AL}}$.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke fgm und fkL geht hervor $fg:gm = fk:fL$ oder $fg:gm = \frac{b}{2}:fL$; also $gm = \frac{2fg.fL}{b}$. Da aber fL die mittlere geometrische Proportionale zwischen AL und LH ist, so folgt $fL = \sqrt{AL.h}$, demnach ist $gm = \frac{2fg.\sqrt{AL.h}}{b}$. Somit ist das Bogenelement:

$$FG = \frac{2fg.l.\sqrt{AL.h}}{b\sqrt{(2l - AL)\,AL}} = \frac{2fg.l.\sqrt{h}}{b\sqrt{(2l - AL)}}.$$

Setzt man diesen Werth in Gl. 1, so folgt für das Zeitelement

$$\tau = \frac{2fg.l.\sqrt{h}}{b\sqrt{(2l - AL)}.\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{l}{g}}.\frac{fg}{b\sqrt{1 - \frac{AL}{2l}}}.$$

Ist der Elongationswinkel klein genug, so daß man den Sinusversus AL gegen 2l außer Acht lassen kann, wie dieß vielfach in der Anwendung vorkommt, dann wird die Zeit für das Bogenelement:

$$\tau = \frac{fg}{b}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Denkt man sich nun den Bogen AD so in Elemente getheilt, daß die entsprechenden Elemente des Halbkreises AfH alle gleich werden, und ist die Anzahl derselben gleich n, so wird man für jedes Zeitelement einen dem obigen gleichen Ausdruck erhalten. Addirt man die Zeitelemente, so gibt ihre Summe die zum Durchlaufen des Bogens DA verwendete Zeit oder die halbe Schwingungszeit des Pendels. Es ist aber die Summe der Elemente des Halbkreises AfH gleich $n.fg = \frac{b\pi}{2}$ oder $fg = \frac{b\pi}{2.n}$, daher die Schwingungszeit für ein Element $\tau = \frac{\pi}{2n}\sqrt{\frac{l}{g}}$, also für n Elemente oder die halbe Schwingungszeit des

Pendels $= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$. Die gleiche Zeit braucht auch das Pendel, um auf dem Bogen AB aufzusteigen. Ist nun t die ganze Schwingungszeit, so folgt:

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots \; 2.$$

Bei dieser Herleitung ist vorausgesetzt, daß der Elongationswinkel sehr klein sei. Für solche ist die Schwingungszeit unabhängig von dem Winkel, da er nicht in Gl. 2 vorkommt. Es schwingen also nicht weit ausschlagende Pendel isochron. Für größere Elongationswinkel gibt diese Formel die Schwingungszeit etwas zu klein an. Bis zu Winkeln von 10° ist sie jedoch vollkommen genau.

Will man die Schwingungszeit für alle Fälle mit der gehörigen Schärfe bestimmen, so darf man die Größe AL nicht vernachläßigen. Die Herleitung durch höhere Mathematik gibt folgende Gleichung:

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{b}{2l} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{2l}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{2l}\right)^3 + \ldots\right].$$

In den meisten Fällen ist es hinreichend, die zwei ersten Glieder dieser Reihe beizubehalten und die übrigen zu vernachläßigen, wodurch man erhält:

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{b}{8l}\right) = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\sin v . \alpha}{8}\right).$$

Für einen Winkel von 15° erhält man nach dieser Formel

$$t = 1{,}0042592\,\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Nimmt man die vier ersten Glieder der Reihe, so erhält man:

$$t = 1{,}0043695\,\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

§. 253.

Vergleichung zweier Pendel. Da mit der geographischen Breite die Beschleunigung der Schwere sich ändert, so ist klar, daß auch die Schwingungszeiten der Pendel für verschiedene Orte sich ändern müssen. Sei t′ die Schwingungszeit eines Pendels von der Länge l′ an einem Orte, für welchen g′ die Beschleunigung der Schwere ist, so hat man: $t' = \pi\sqrt{\frac{l'}{g'}}$, somit verhält sich

$$t : t' = \sqrt{\frac{l}{g}} : \sqrt{\frac{l'}{g'}} \quad \ldots \; 1.$$

Sind die Pendellängen gleich oder $l = l'$, so folgt

$$t : t' = \sqrt{g'} : \sqrt{g}\,; \; t^2 : t'^2 = g' : g \quad \ldots \; 2.$$

d. h. für gleiche Pendel verhalten sich die Schwingungszeiten umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus der Beschleunigung der Schwere; oder die Quadrate der Schwingungszeiten verhalten sich umgekehrt wie die Beschleunigung der Schwere. Für zwei Pendel an demselben Orte wird $g' = g$, daher

$$t : t = \sqrt{l} : \sqrt{l'} \quad \ldots 3$$

d. h. an demselben Orte verhalten sich die Schwingungszeiten zweier Pendel wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen.

In einer gegeben Zeit T mache das erste Pendel N und das zweite N' Schwingungen, dann ist $t = \frac{T}{N}$, $t' = \frac{T}{N'}$; demnach erhält man:

$$\frac{T}{N} : \frac{T}{N'} = \sqrt{l} : \sqrt{l'}$$

und daraus: $l : l' = N'^2 : N^2 \quad \ldots 4$

d. h. an demselben Orte verhalten sich die Pendellängen umgekehrt wie die Quadrate der Schwingungszahlen.

Sind die Schwingungszeiten zweier Pendel an verschiedenen Orten einander gleich, dann ist $\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{l'}{g}}$, oder:

$$g : g' = l : l' \quad \ldots 5$$

d. h. bei gleichen Schwingungszeiten ist die Schwere den Pendellängen proportional.

Für gleiche Pendel ist $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, $t' = \pi \sqrt{\frac{l}{g'}}$ und man erhält: $g : g' = t'^2 : t^2 = N^2 : N'^2 \quad \ldots 6$

d. h. die Schwerkräfte verhalten sich direct wie die Quadrate der Schwingungszahlen und umgekehrt wie die Quadrate der Schwingungszeiten.

§. 254.

Secundenpendel. Ein Pendel, für welches die Schwingungszeit eine Secunde beträgt, heißt ein Secundenpendel. Ist $\mathfrak{S}$ die Länge desselben, so hat man, weil $t = 1$ ist:

$$1 = \pi \sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{g}}.$$

Hieraus ergibt sich die Länge des Secundenpendels:

$$\mathfrak{S} = \frac{g}{\pi^2} \quad \ldots 1.$$

Für Paris ist $g = 9{,}8088$, folglich die Länge des Secundenpendels daselbst $\mathfrak{S} = \frac{9{,}8088}{(3{,}1416)^2} = 0{,}9938$ Meter.

Die Länge eines Secundenpendels kann man durch Beobachtungen mittelst eines beliebigen Pendels finden. Es mache ein Pendel von der Länge l in der Zeit T N Schwingungen, dann ist $\frac{T}{N} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, daraus folgt:

$$l = \frac{T^2 g}{\pi^2 N^2}.$$

Ferner ist $$\mathfrak{S} = \frac{g}{\pi^2}.$$

Durch Division beider Gleichungen ergibt sich

$$\frac{\mathfrak{S}}{l} = \frac{N^2}{T^2}$$

daher $$\mathfrak{S} = \frac{lN^2}{T^2} \; . \; . \; . \; 2.$$

Die Beschleunigung der Schwere kann selbst durch Pendelversuche am besten bestimmt werden. Aus Gl. 1 folgt unmittelbar

$$g = \pi^2 \mathfrak{S}.$$

Werden aber die Beobachtungen mit einem andern Pendel angestellt, so ist

$$g = \frac{\pi^2 l}{t^2}$$

oder $$g = \frac{\pi^2 l N^2}{T^2}.$$

§. 254.

Einfaches Centrifugalpendel. Wenn sich ein Pendel CB, Fig. 200, so um die verticale Linie CE dreht, daß jeder Punkt desselben einen horizontalen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunkt in dieser Verticalen liegt, so heißt ein solches Pendel ein Centrifugalpendel. Es sei ABRD der vom untersten Punkte beschriebene Kreis, DE = r dessen Radius, DC = l die Länge des Pendels, die Verticale CE = h im Mittelpunkt dieses Kreises die Höhe, $\sphericalangle$ ACD = $\sphericalangle$ ACB = α der Elongationswinkel, t die Umlaufszeit. Im untersten Punkte trage das Pendel ein Gewicht Q, dessen Centrifugalkraft F sei.

Es wirken nun an dem untersten Punkt B zwei Kräfte, nämlich das Gewicht Q vertical abwärts und die Centrifugalkraft F in der Ebene des untersten Kreises radial auswärts. Macht man Bk = Q und zerlegt diese Kraft in zwei Seitenkräfte BG nach der Richtung CB und BH nach der Richtung des Radius gegen das Centrum wirkend, so wird erstere durch die feste Axe C aufgehoben, letztere aber wirkt der Centrifugalkraft direct entgegen. Soll nun der Elongationswinkel unverändert bleiben, so muß letztere Seitenkraft der Centrifugalkraft das Gleichgewicht halten. Nun ist aber

$$BH = Q \,.\, \text{tang}\, \alpha$$

$$F = \frac{4r\pi^2 Q}{t^2 \,.\, g}$$

oder da $r = l \sin \alpha$

$$F = \frac{4l \sin \alpha \pi^2 Q}{t^2 \,.\, g}.$$

Nun muß $BH = F$ sein, also

$$Q \,\text{tang}\, \alpha = \frac{4l \sin \alpha \pi^2 Q}{t^2 \,.\, g}.$$

Hieraus ergibt sich die Umlaufszeit

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}}$$

oder da $l \cos \alpha = h$

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Die Schwingungszeit eines gewöhnlichen Pendels von der Länge h ist $t' = \pi \sqrt{\frac{h}{g}}$, daher hat man

$$t : t' = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}} : \pi \sqrt{\frac{h}{g}} = 2:1$$

$$t = 2t'$$

d. h. wenn die Länge des gewöhnlichen Pendels der Höhe des Centrifugalpendels gleich ist, so ist die Umlaufszeit des letztern gleich der doppelten Schwingungszeit des erstern.

Das Centrifugalpendel wird gebraucht zum Reguliren von Uhren, als Regulator bei Dampfmaschinen, wo es aber eine Construction wie etwa Fig. 201 erhält.

§. 255.

Zusammengesetztes Pendel. Ein Körper MN von beliebiger Gestalt, Fig. 202, schwinge sich um die horizontale Axe C. Es sei S der Schwerpunkt, M die Masse desselben, $\mathfrak{M}$ das Trägheitsmoment in Bezug auf die Axe C, $\sphericalangle$ BCD $= \alpha$ der Elongationswinkel, den die durch den Schwerpunkt gezogene Linie CB mit der verticalen CD bildet, CS $=$ a. Dieß zusammengesetzte Pendel wird nun in einer gewissen Zeit eine Schwingung vollenden. Es läßt sich aber auch jedenfalls ein einfaches Pendel von jetzt noch unbestimmter Länge l denken, welches mit dem vorliegenden zusammengesetzten ganz dieselbe Schwingungsdauer hat. In der durch C, S gezogenen Linie werde nun ein Punkt B so gewählt, daß CB $=$ l gleich der Länge des erwähnten einfachen Pendels ist. Es handelt sich nun hauptsächlich vorerst um die Bestimmung der Entfernung des Punktes B von der Drehaxe. Das am Schwerpunkt S angreifende vertical abwärts

wirkende Gewicht Mg läßt sich in zwei Seitenkräfte zerlegen, wovon eine nach der Richtung CS wirkt und auf die Drehbewegung keinen Einfluß hat, und in eine $Mg \sin \alpha$ normal zu CS, welche die Drehbewegung des Pendels bewirkt und deren statisches Moment $= Mga \sin \alpha$ ist. Reducirt man diese Kraft auf den Punkt B, so ergibt sich daselbst eine Kraft $= \frac{Mga \sin \alpha}{l}$. Die auf den gleichen Punkt B reducirte Masse ist $\frac{\mathfrak{M}}{l^2}$, daher folgt die Beschleunigung dieses Punktes:

$$G = \frac{Mga \sin \alpha}{l} : \frac{\mathfrak{M}}{l^2} = \frac{Mga \sin \alpha . l}{\mathfrak{M}}.$$

Denken wir uns nun ein einfaches Pendel von der Länge $CB = l$, das in B einen materiellen Punkt trägt, so kann man sich vorstellen, derselbe gehe auf der schiefen Ebene BE mit dem veränderlichen Neigungswinkel herab. Ist G′ die correspondirende Beschleunigung desselben, so wird $G' = g \sin \alpha$. Wenn nun das einfache Pendel mit dem zusammengesetzten gleiche Schwingungszeit haben soll, so müssen die Beschleunigungen G und G′ desselben Punktes einander gleich sein. Daher erhält man die Gleichung

$$\frac{Mga . l . \sin \alpha}{\mathfrak{M}} = g \sin \alpha$$

und hieraus folgt:

$$l = \frac{\mathfrak{M}}{Ma} \; . \; . \; . \; 1.$$

Dieser so bestimmte Punkt B heißt der **Mittelpunkt des Schwunges** oder der **Schwingungspunkt**. In dieser Entfernung von der Drehaxe kann man sich die ganze Masse des Pendels vereinigt vorstellen und dasselbe schwingt wie ein einfaches Pendel von dieser Länge.

Man findet also die Länge des einfachen Pendels, welches mit einem zusammengesetzten gleiche Schwingungszeit hat, wenn man das Trägheitsmoment des letztern in Bezug auf die Drehaxe dividirt durch das statische Moment der Masse desselben in Bezug auf die gleiche Axe.

Durch obige Gleichung ist zwar nicht die Lage eines bestimmten Punktes gegeben, denn es entsprechen derselben viele Punkte, die alle gleiche Entfernung von der Drehaxe und gleiche Schwingungsdauer haben. Man versteht aber von allen diesen Punkten nur denjenigen unter Schwingungspunkt, welcher in der durch den Schwerpunkt auf die Drehaxe normal gezogenen geraden Linie liegt. Dieser Punkt darf nicht verwechselt werden mit dem Mittelpunkt der Trägheit, welchen man auch zuweilen Schwingungspunkt nennt und dessen Entfernung von der Drehaxe sich bestimmt durch die Gleichung

$$r = \sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{M}}.$$

Setzen wir nun den Werth für l in die Gleichungen des §. 252, so erhalten wir die Schwingungszeit des zusammengesetzten Pendels:

$$t = \pi \sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{Mag}} \quad . \; . \; . \; 2$$

oder genauer

$$t = \left(1 + \frac{baM}{8\mathfrak{M}}\right) . \pi . \sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{Mag}} \quad . \; . \; . \; 3.$$

§. 256.

Der Aufhängepunkt und der Schwingungspunkt stehen in einer interessanten Relation zu einander. Um diese kennen zu lernen, sei $\mathfrak{M}'$ das Trägheitsmoment des physischen Pendels in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt S gehende mit der Drehare parallele Are. Man hat dann bekanntlich

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + Ma^2.$$

Setzt man diesen Werth in Gl. 1 des vorigen §, so folgt

$$l = \frac{\mathfrak{M}' + Ma^2}{Ma} = a + \frac{\mathfrak{M}'}{Ma} \quad . \; . \; . \; 1.$$

Hängt man nun das Pendel in B auf oder macht man den Mittelpunkt des Schwungs zum Aufhängepunkt und bedeutet l' hiefür die Entfernung des neuen Schwingungspunktes von der Drehare und a' die Entfernung des Schwerpunktes von derselben, so hat man offenbar die Gleichung

$$l' = a' + \frac{\mathfrak{M}'}{Ma'} \quad . \; . \; . \; 2.$$

Nun ist aber $a' = l - a = \frac{\mathfrak{M}'}{Ma}$, demnach folgt, wenn man in 2 substituirt:

$$l' = l - a + \frac{\mathfrak{M}' . Ma}{M . \mathfrak{M}'}$$

$$l' = l - a + a$$

$$l' = l \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 3.$$

Hieraus geht hervor: **Wenn man das physische Pendel umkehrt und den Mittelpunkt des Schwungs zu seinem Aufhängepunkt macht, so wird der vorige Aufhängepunkt zum Mittelpunkt des Schwungs, und es hat das Pendel in beiden Fällen die gleiche Schwingungszeit.**

Aus Gl. 1 sieht man, daß der Schwingungspunkt stets tiefer liegt als der Schwerpunkt und zwar um die Größe $\frac{\mathfrak{M}'}{Ma}$.

§. 257.

Die Gleichung für die Schwingungszeit des zusammengesetzten Pendels kann auch zur Bestimmung des Trägheitsmomentes eines Körpers dienen. Aus der Gleichung

$$t = \pi \sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{Mag}}$$

folgt nämlich $$\mathfrak{M} = \frac{Magt^2}{\pi^2},$$

oder wenn man das Gewicht des Körpers $Mg = Q$ setzt

$$\mathfrak{M} = \frac{Qat^2}{\pi^2}.$$

Beobachtet man also die Schwingungszeit und bestimmt das Gewicht, sowie die Lage des Schwerpunktes, so findet man durch diese Gleichung das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Drehaxe.

Achtes Kapitel.

Vom Stoße fester Körper.

§. 258.

Erklärung. Treffen zwei Körper in ihrer Bewegung zusammen und wirken sie dabei wechselseitig so auf einander, daß hierdurch eine Aenderung in ihren Bewegungszuständen erfolgt, so nennt man dieses Zusammentreffen beider Körper einen Stoß.

Wenn die Richtung MN, Fig. 203, nach welcher sich der Schwerpunkt S des anstoßenden Körpers A bewegt, auch durch den Schwerpunkt S′ des angestoßenen B geht, so ist der Stoß ein centraler Stoß, im andern Falle ein excentrischer Stoß, wie in Fig. 204.

In Hinsicht auf die Richtung unterscheidet man den geraden und schiefen Stoß. Ein Stoß wird ein gerader genannt, wenn die Berührungsebene CD im Augenblick des Stoßes rechtwinkelig auf der Bewegungsrichtung beider Körper steht. Ist dieß nicht der Fall, so heißt der Stoß ein schiefer Stoß, wie in Fig. 205, wo MN die Richtung des anstoßenden und S′E die des angestoßenen ist.

Die Aenderung des Bewegungszustandes zweier Körper bei ihrem Zusammenstoß geschieht in einer sehr kleinen Zeit und es hängt die Stoßwirkung hauptsächlich ab von der Stärke der Stoßkraft, der Masse, der Geschwindigkeit und der Elasticität der Körper. Bei ihrem Zusammentreffen haben die Körper das Bestreben in einander einzudringen und es drücken sich dieselben in den Berührungsstellen so lange gegenseitig ein, bis die Cohäsionswiderstände oder die Geschwindigkeiten beider einander gleich geworden sind. Dieser Vorgang bildet die erste Periode bei der Stoßwirkung. In der zweiten Periode suchen bei vollkommen elastischen Körpern die zusammengedrückten Theile sich wieder auszudehnen und es wiederholen sich dieselben gegenseitigen Aufeinanderwirkungen so lange, bis die vorige Gestalt der Körper wieder vollständig hergestellt ist. Bei unvollkommen elastischen Körpern wird in der zweiten Periode durch die Rückwirkungen die vorige Gestalt nicht mehr vollkommen hergestellt und es bewegen sich die Körper

nach dem Stoße mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Bei unelastischen Körpern haben dieselben gar kein Bestreben, ihre vorige Gestalt wieder anzunehmen und es hören die gegenseitigen Einwirkungen mit der ersten Periode auf und die Körper gehen mit gemeinschaftlicher Geschwindigkeit weiter.

Hiernach haben wir also zu unterscheiden: den Stoß unelastischer Körper, den Stoß unvollkommen elastischer Körper und den Stoß vollkommen elastischer Körper.

In der Natur gibt es weder vollkommen unelastische, noch vollkommen elastische Körper. Zur Herleitung der Gleichungen wird aber obige Eintheilung dennoch beibehalten und es werden dann diese auf die in der Natur vorkommenden Körper mit Berücksichtigung ihrer Eigenthümlichkeiten angewendet.

Man unterscheidet ferner noch den Stoß freier Körper von dem Stoße ganz oder theilweise unterstützter Körper.

§. 259.

Centraler gerader Stoß unelastischer Körper. Wir nehmen an, zwei Körper bewegen sich in gleicher Richtung und es sei M die Masse des anstoßenden oder folgenden Körpers, M' die des angestoßenen oder vorangehenden, v und v' ihre Geschwindigkeiten vor dem Stoße, wobei $v > v'$ vorausgesetzt wird. Da nach dem Stoße die beiden Massen sich als ein Ganzes betrachten lassen, so sei V die Geschwindigkeit beider nach dem Stoß. Der Stoßact geschieht innerhalb einer sehr kleinen, jedoch endlichen Zeit t. In jedem Augenblicke ist nun Wirkung und Gegenwirkung beider Körper einander gleich. Denken wir uns die Zeit t in unendlich viele Zeittheilchen τ getheilt, während welcher die einzelnen Wechselwirkungen erfolgen, und sind $p', p'', p''' \ldots$ die in diesen Zeittheilchen thätigen constanten Druckkräfte, so werden diese die Geschwindigkeit der Masse M stets vermindern und die der Masse M' vermehren, bis kein weiteres Zusammendrücken mehr erfolgt. Nun sind aber die Geschwindigkeitsverluste der Masse M in den einzelnen Zeittheilchen $\frac{p'}{M}\tau, \frac{p''}{M}\tau, \frac{p'''}{M}\tau \ldots$ Zieht man die Summe sämmtlicher Verluste von der anfänglichen Geschwindigkeit v ab, so erhält man die Endgeschwindigkeit dieser Masse nach dem Stoße

$$V = v - (p' + p'' + p''' + \ldots)\frac{\tau}{M} \ldots 1.$$

Die Geschwindigkeitszunahmen der Masse M' in den einzelnen Zeittheilchen erhält man ebenso durch $\frac{p'}{M'}\tau, \frac{p''}{M'}\tau, \frac{p'''}{M'}\tau \ldots$ Addirt man die Summe sämmtlicher Geschwindigkeitszunahmen zu der anfänglichen Geschwindigkeit v', so erhält man die Geschwindigkeit der Masse M' nach dem Stoß:

$$V = v' + (p' + p'' + p''' + \ldots)\frac{\tau}{M'} \ldots 2.$$

Aus 1 folgt:

$$MV = Mv - (p' + p'' + p''' + \ldots)\,\tau$$

und aus 2:

$$M'V = M'v' + (p' + p'' + p''' + \ldots)\,\tau.$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man:

$$MV + M'V = Mv + M'v' \ldots 3$$

d. h. die Summe der Bewegungsgrößen beider Körper nach dem Stoße ist gleich derjenigen vor dem Stoße.

Die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stoße ergibt sich also

$$V = \frac{Mv + M'v'}{M + M'} \ldots 4$$

d. h. die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stoße ist gleich der Summe der Bewegungsgrößen vor dem Stoße dividirt durch die Summe der Massen beider Körper.

Bewegen sich beide Körper vor dem Stoße in entgegengesetzter Richtung, so hat man $-v'$ statt $+v'$ zu setzen, und man erhält:

$$V = \frac{Mv - M'v'}{M + M'} \ldots 5.$$

Sind Q und Q' beziehungsweise die Gewichte beider Körper, so erhält man:

$$V = \frac{Qv \pm Q'v'}{Q + Q'} \ldots 6.$$

Ist der angestoßene Körper vor dem Stoße in Ruhe, so wird $v' = 0$, daher

$$V = \frac{Mv}{M + M'} = \frac{Qv}{Q + Q'} \ldots 7.$$

Wenn der angestoßene Körper unbeweglich ist, so hat man $v' = 0$ und $M' = \infty$ zu setzen, und man erhält:

$$V = \frac{Mv}{M + \infty} = 0 \ldots 8.$$

Hieraus folgt, daß der anstoßende Körper seine ganze Geschwindigkeit verliert und nach dem Stoße vor dem angestoßenen liegen bleibt.

Aufg. 1. Zwei Körper bewegen sich in gleicher Richtung; der eine wiegt 36 Pfd. und hat eine Geschwindigkeit von 15 Fuß, der andere wiegt 25 Pfd. und hat eine Geschwindigkeit von 8 Fuß. Welches ist ihre Geschwindigkeit nach dem Stoße?

Aufl. Hier ist $Q = 36$, $Q' = 25$, $v = 15$, $v' = 8$, somit nach Gl. 6

$$V = \frac{36.15 + 25.8}{36 + 25} = 12{,}13'.$$

Aufg. 2. Wenn die Körper in voriger Aufgabe sich gegeneinander bewegen, welches ist alsdann ihre Geschwindigkeit nach dem Stoß?

Aufl. Nach Gl. 6 ist das untere Zeichen zu nehmen, und man hat

$$V = \frac{36.15 - 25.8}{36 + 25} = 5{,}57'.$$

Aufg. 3. Welches ist die Geschwindigkeit nach dem Stoße, wenn der zweite Körper in Aufgabe 1 vor dem Stoß in Ruhe ist?

Aufl. Nach Gl. 7 ist

$$V = \frac{36 \cdot 15}{36 + 25} = 8{,}85'.$$

§. 260.

Verlust an lebendiger Kraft beim Stoße unelastischer Körper. Wir haben bereits gesehen, daß die Körper beim Zusammenstoßen eine Formänderung erleiden, indem die Berührungsflächen etwas eingedrückt werden. Hierzu ist aber ein gewisser Kraftaufwand, eine gewisse Arbeitsgröße erforderlich, und es wird offenbar dazu ein Theil der den bewegten Massen innewohnenden lebendigen Kraft verwendet, welche in vorliegendem Falle nicht mehr zurückerstattet wird, und somit als Verlust betrachtet werden muß. Diesen Verlust findet man aber, wenn man die lebendige Kraft der Massen, welche nach dem Stoße noch vorhanden ist, abzieht von derjenigen, welche vor dem Stoße in derselben vorhanden war.

Die lebendige Kraft vor dem Stoße ist aber $Mv^2 + M'v'^2$, diejenige nach dem Stoße ist $(M + M')\,V^2 = (M + M')\,.\left(\frac{Mv + M'v'}{M + M'}\right)^2 = \frac{(Mv + M'v')^2}{M + M'}$.

Ist $\mathfrak{V}$ der Verlust an lebendiger Kraft, so hat man sofort

$$\mathfrak{V} = Mv^2 + M'v'^2 - \frac{(Mv + M'v')^2}{M + M'}.$$

Nach gehöriger Reduction erhält man endlich:

$$\mathfrak{V} = \frac{MM'\,(v - v')^2}{M + M'} \quad \ldots 1.$$

Hat die Masse M' die entgegengesetzte Richtung wie die Masse M, so wird v' negativ und man hat

$$\mathfrak{V} = \frac{MM'\,(v + v')^2}{M + M'} \quad \ldots 2.$$

Ist der angestoßene Körper in Ruhe, dann wird $v' = 0$, also

$$\mathfrak{V} = \frac{MM'v^2}{M + M'} \quad \ldots 3.$$

Es sei ferner W der Verlust an Arbeitsgröße, Q und Q' die Gewichte der Körper, dann ist $W = \frac{\mathfrak{V}}{2}$, $M = \frac{Q}{g}$, $M' = \frac{Q'}{g}$. Somit erhält man für den Fall, wenn sich beide Körper in gleichem Sinne bewegen:

$$W = \frac{Q.Q'\,(v - v')^2}{2g\,(Q + Q')} \quad \ldots 4.$$

und wenn sie sich gegeneinander bewegen

$$W = \frac{Q \cdot Q' (v + v')^2}{2g (Q + Q')} \ldots 5$$

endlich wenn der angestoßene in Ruhe ist

$$W = \frac{Q \cdot Q' v^2}{2g (Q + Q')} \ldots 6.$$

Aufg. Zwei Locomotiven stoßen auf einer Eisenbahn zusammen. Die erste hat ein Gewicht von 40000 Pfd. und eine Geschwindigkeit von 44′, die zweite ein Gewicht von 32000 Pfd. und eine Geschwindigkeit von 36 Fuß. Welches ist der Verlust an Arbeitsgröße, oder welche Arbeitsgröße wird auf das Zertrümmern der Maschinentheile beim Zusammenstoß verwendet: 1) Wenn sie sich in gleicher Richtung bewegen, 2) wenn sie sich gegeneinander bewegen, 3) wenn die zweite vor dem Stoße in Ruhe wäre?

Aufl. Hier ist $Q = 40000$, $Q' = 32000$, $v = 44$, $v' = 36$. Daher

1. Nach Gl. 4, $W = 17186{,}8$ Fußpfd.
2. Nach Gl. 5, $W = 1739934$ Fußpfd.
3. Nach Gl. 6, $W = 502696$ Fußpfd.

§. 261.

Centraler gerader Stoß elastischer Körper. Die elastischen Körper stellen in der zweiten Periode des Stoßactes ihre ursprüngliche Form ganz oder doch theilweise wieder her, und wirken also bei dieser Wiederherstellung der Form abermals wechselseitig auf einander. Von dem Grade der Elasticität hängt aber das völlige oder theilweise Verschwinden der erzeugten Eindrücke der Berührungsstellen ab.

Es sei nun $\mathfrak{E}$ ein von dem Grade der Elasticität abhängiger Coefficient, V die Geschwindigkeit der Masse M nach dem Stoße, V' die der Masse M', v und v' die Geschwindigkeiten dieser Massen vor dem Stoße; V'' diejenige Geschwindigkeit, mit welcher sich beide Körper nach dem Stoße fortbewegen würden, wenn sie unelastisch wären. Hiernach wäre

$$V'' = \frac{Mv + M'v'}{M + M'}.$$

Nun ist aber der Geschwindigkeitsverlust des ersten Körpers während der Periode des Zusammendrückens der Theile $= v - V''$, also ist er während der Periode des Wiederherstellens der Form $= \mathfrak{E} (v - V'')$. Somit ist der Geschwindigkeitsverlust im Ganzen:

$$(v - V'') + \mathfrak{E} (v - V'') = (1 + \mathfrak{E}) (v - V'').$$

Also ist die Geschwindigkeit dieses Körpers nach dem Stoße:

$$V = v - (1 + \mathfrak{E}) (v - V'') \ldots 1.$$

Substituirt man in diese Gleichung den Werth von V'', so erhält man nach gehöriger Reduction:

$$V = (1 + \mathfrak{E}) \frac{Mv + M'v'}{M + M'} - \mathfrak{E}v \ldots 2.$$

Ferner ist die Geschwindigkeitszunahme der Masse M′ während der ersten Periode gleich $V'' - v'$ und während der zweiten Periode $\mathfrak{E}\,(V'' - v')$, also im Ganzen

$$V'' - v' + \mathfrak{E}\,(V'' - v') = (1 + \mathfrak{E})\,(V'' - v').$$

Demnach ist die Geschwindigkeit dieses Körpers nach dem Stoße

$$V' = v' + (1 + \mathfrak{E})\,(V'' - v') \;.\;.\;.\; 3.$$

Substituirt man wieder den Werth von V″, so erhält man:

$$V' = (1 + \mathfrak{E})\,\frac{Mv + M'v'}{M + M'} - \mathfrak{E}v' \;.\;.\;.\; 4.$$

Bewegen sich beide Körper gegeneinander, so muß v′ negativ genommen werden.

§. 262.

Für vollkommen elastische Körper wird $\mathfrak{E} = 1$. Substituirt man diesen Werth in die Gleichungen des vorigen §, so erhält man:

$$V = 2V'' - v$$

$$V = (1 + 1)\,\frac{Mv + M'v'}{M + M'} - v$$

$$V = \frac{(M - M')\,v + 2M'v'}{M + M'} \;.\;.\;.\; 1.$$

Ferner $V' = 2V'' - v'$

$$V' = (1 + 1)\,\frac{Mv + M'v'}{M + M'} - v'$$

$$V' = \frac{(M' - M) + 2Mv}{M + M'} \;.\;.\;.\; 2.$$

Sind die Massen der Körper einander gleich, also $M = M'$, so erhält man aus Gl. 1:

$$V = \frac{(M - M)\,v + 2Mv'}{M + M} = \frac{2Mv'}{2M}$$

$$V = v' \;.\;.\;.\; 3.$$

Ebenso erhält man aus Gl. 2:

$$V' = \frac{(M - M)\,v' + 2Mv}{M + M'} = \frac{2Mv}{2M}$$

$$V' = v \;.\;.\;.\; 4.$$

Aus Gl. 3 und 4 folgt: zwei vollkommen elastische Körper von gleicher Masse verwechseln während des Stoßes ihre Geschwindigkeiten, und jeder bewegt sich mit der Geschwindigkeit, die der andere vor dem Stoße hatte, nach dem Stoße weiter.

Befindet sich der angestoßene Körper vor dem Stoße in Ruhe, so ist $v' = 0$ und man hat

$$V = 0,\; V' = v.$$

Der anstoßende verliert also seine ganze Geschwindigkeit und bleibt nach dem Stoße in Ruhe, der angestoßene aber geht mit der Geschwindigkeit des anstoßenden Körpers weiter.

Bewegen sich beide Körper vor dem Stoße gegeneinander, so kehren beide nach dem Stoße um, und jeder geht rückwärts mit der Geschwindigkeit, die der andere vor dem Stoße hatte.

Ist der angestoßene Körper unbeweglich, so hat man $v' = 0$ und $V' = 0$. Es ist aber

$$V' = \frac{(M' - M)\,v' + 2Mv}{M + M'}$$

also

$$0 = \frac{2Mv}{M + M'}.$$

Damit aber diese Gleichung stattfinden kann, muß sein $M' = \infty$. Ferner ist:

$$V = \frac{(M - M')\,v + 2M'v'}{M + M'} = \frac{\left(\frac{M}{M'} - 1\right) v + 2v'}{\frac{M}{M'} + 1}$$

$$= \frac{\left(\frac{M}{\infty} - 1\right) v + 2v'}{\frac{M}{\infty} + 1}$$

$$= \frac{(0 - 1)\,v + 2v'}{1} = \frac{-v + 2.0}{1}$$

$$V = -v.$$

Hieraus folgt: Daß der anstoßende Körper nach dem Stoße rückwärts geht mit der Geschwindigkeit, die er vor dem Stoße hatte.

§. 263.

Verlust an lebendiger Kraft beim Stoße elastischer Körper. Behalten wir die bisherige Bezeichnung bei, so ist die Summe der lebendigen Kräfte vor dem Stoße $Mv^2 + M'v'^2$ und die nach dem Stoße $MV^2 + M'V'^2$. Nun ist aber für vollkommen elastische Körper nach vorigem §. $V = 2V'' - v$, $V' = 2V'' - v'$, daher $MV^2 + MV'^2 = M\,(2V'' - v)^2 + M'\,(2V'' - v')^2$. Also der Verlust an lebendiger Kraft:

$$\mathfrak{V} = Mv^2 + M'v'^2 - [M\,(2V'' - v)^2 + M'\,(2V'' - v')^2]$$

$$\mathfrak{V} = Mv^2 + M'v'^2 - Mv^2 - M'v'^2 + 4V''\,(Mv + M'v' - MV'' - M'V'')$$

die in den Klammern enthaltene Größe dieses Ausdrucks ist aber nichts anders als die auf Null gebrachte Gleichung für V'' in §. 261. Somit folgt:

$$\mathfrak{V} = 0.$$

Hieraus folgt: **Beim Stoße vollkommen elastischer Körper findet kein Verlust an lebendiger Kraft statt.**

Sind die Körper unvollkommen elastisch, so ist $V = V'' - \mathfrak{E} (v - V'')$, $V' = V'' + \mathfrak{E} (V'' - v')$, daher der Verlust an lebendiger Kraft:

$$\mathfrak{V} = Mv^2 + M'v'^2 - M [V'' - \mathfrak{E} (v - V'')]^2 - M' [V'' + \mathfrak{E} (V'' - v')]^2.$$

Nach gehöriger Reduction und Substitution ergibt sich:

$$\mathfrak{V} = \frac{(1 - \mathfrak{E}^2)\, MM' (v \mp v')^2}{M + M'}.$$

Also der Verlust an Arbeitsgröße:

$$W = \frac{(1 - \mathfrak{E}^2)\, MM' (v - v')^2}{2 (M + M')}$$

oder wenn man die Gewichte der Körper einführt

$$W = \frac{(1 - \mathfrak{E}^2)\, Q.Q' (v \mp v')^2}{2g (Q + Q')}.$$

Setzt man in diese Gleichung $\mathfrak{E} = 0$ oder $\mathfrak{E} = 1$, so erhält man wieder die frühern Resultate für unelastische und vollkommen elastische Körper.

§. 264.

Läßt man einen Körper von der Höhe H frei herabfallen, so erlangt er bei seinem Auftreffen die Geschwindigkeit $\sqrt{2gH}$. Bei vollkommener Elasticität der Körper wird er wieder mit dieser Geschwindigkeit auf die Höhe H steigen, wenn vom Luftwiderstand abstrahirt wird. Sind aber die Körper unelastisch, so wird er diese Geschwindigkeit nicht mehr ganz annehmen, sondern nur eine Geschwindigkeit $\mathfrak{E} \sqrt{2gH}$. Daher wird er auch nicht mehr die Höhe H erreichen, sondern nur die Höhe h. Dieser entspricht aber eine Anfangsgeschwindigkeit $= \sqrt{2gh}$. Somit hat man die Gleichung

$$\mathfrak{E} \sqrt{2gH} = \sqrt{2gh}.$$

und daraus folgt

$$\mathfrak{E} = \sqrt{\frac{h}{H}}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung läßt sich also der Coefficient $\mathfrak{E}$ durch Versuche bestimmen.

§. 265.

Centraler schiefer Stoß. Zwei Körper A, B, Fig. 206, deren Massen M, M′ sind, bewegen sich nach den Richtungen SF und S′G mit den Geschwindigkeiten v, v′. Sie treffen sich im Punkte E, so daß die Berührungsebene CD normal auf der Centrallinie MN steht. Um nun zu bestimmen, mit welchen Geschwindigkeiten und in welchen Richtungen beide Körper sich nach dem Stoße fortbewegen,

seien α, β die Winkel, welche die Bewegungsrichtungen vor dem Stoße mit der Linie MN bilden. Man zerlege die Geschwindigkeit eines jeden Körpers in zwei rechtwinkelige Seitengeschwindigkeiten normal zur Centrallinie und nach der Richtung derselben. Die Seitengeschwindigkeiten normal zur Centrallinie oder parallel zur Berührungsebene sind $v \sin \alpha$ und $v' \sin \beta$; diejenigen in der Richtung der Centrallinie oder normal zur Berührungsebene sind $v \cos \alpha$ und $v' \cos \beta$. Durch den Stoß bleiben die erstern Geschwindigkeiten ungeändert, die letztern aber erleiden dadurch eine Veränderung.

Betrachtet man die Körper als unelastisch und sieht auch von der Reibung ab, so erhält man die gemeinschaftliche Geschwindigkeit V'' beider Körper nach dem Stoße in der Richtung der Centrallinie:

$$V'' = \frac{Mv \cos \alpha + M'v \cos \beta}{M + M'} .$$

Setzt man diese Geschwindigkeit mit jeder der tangentialen Seitengeschwindigkeit zusammen, so erhält man für den Körper A die mittlere Geschwindigkeit nach dem Stoße:

$$V = \sqrt{V'' + v^2 \sin^2 \alpha}$$

und die Richtung derselben, wenn φ den Winkel bedeutet, den sie mit der Centrallinie bildet:

$$\text{tang } \varphi = \frac{v \sin \alpha}{V''} .$$

Für den Körper B erhält man die mittlere Geschwindigkeit nach dem Stoße

$$V' = \sqrt{V''^2 + v' \sin^2 \beta}$$

und die Richtung derselben durch

$$\text{tang } \varphi' = \frac{v' \sin \beta}{V''} .$$

Aufg. Zwei Kugeln von 80 und 60 Pfd. Gewicht bewegen sich mit den respectiven Geschwindigkeiten $v = 30$ Fuß, $v' = 25$ Fuß. Die Bewegungsrichtungen vor dem Stoße bilden mit der Centrallinie die Winkel $\alpha = 25^0$, $\beta = 45^0$. Man soll die Geschwindigkeiten und Bewegungsrichtungen beider Körper nach dem Stoße bestimmen?

§. 266.

Stößt der erste Körper gegen eine unbewegliche Ebene MN, Fig. 207, so sei AC die Geschwindigkeit desselben vor dem Stoße, BK die im Berührungspunkt durch den Schwerpunkt C auf MN gezogene Normale. Man zerlege nun die Geschwindigkeit AC in zwei rechtwinkelige Seitengeschwindigkeiten FC und BC parallel und normal zu MN. Sind nun die Körper unelastisch, so wird die Seitengeschwindigkeit BC durch die Körper vernichtet, und der Körper bewegt sich mit der Seitengeschwindigkeit CE = FC nach der Richtung parallel zu MN weiter. Sind aber die Körper vollkommen elastisch, so

wird der Körper C nach dem Stoße die Seitengeschwindigkeit BC vollkommen wieder annehmen. Er besitzt daher nach dem Stoße die beiden Seitengeschwindigkeiten CE und CB. Er wird sich daher mit der resultirenden Geschwindigkeit CD in der Richtung der Diagonale CD fortbewegen. Nun ist aber, wie leicht ersichtlich, CD = CA. Also bewegt er sich nach dem Stoße mit derselben Geschwindigkeit wie vor dem Stoße. Es ist aber auch ∢ ACB = ∢ BCD. Ersteren heißt man den Einfallswinkel, letzteren den Reflexionswinkel oder Ausfallswinkel. Es ist demnach der Ausfallswinkel gleich dem Einfallswinkel.

Sind die Körper unvollkommen elastisch, so wird die normale Seitengeschwindigkeit nach dem Stoße nicht mehr gleich CB, sondern CG sein, so daß stattfindet

$$BC:CG = 1:E.$$

Bildet man das Parallelogramm CGHE, so gibt die Diagonale die Richtung der Bewegung und Größe der Geschwindigkeit nach dem Stoße an.

§. 267.

Excentrischer Stoß. Der Körper B werde von einer Stoßkraft P excentrisch getroffen, Fig. 208. Auf die Kraftrichtung PC führe man durch den Schwerpunkt S die Normale SC = p und mache deren Rückverlängerung SD = SC = p. In D bringe man zwei Kräfte $\frac{P}{2}$ und $-\frac{P}{2}$ parallel zu P an, so werden sich diese das Gleichgewicht halten. Denkt man sich die Stoßkraft in zwei gleiche Theile, so hat man zwei parallele Kräfte $\frac{P}{2}$ in C und $\frac{P}{2}$ in D wirkend, deren Mittlere gleich ist $R = \frac{P}{2} + \frac{P}{2} = P$, und deren Richtung durch den Schwerpunkt S geht. Die Wirkung dieser Kraft hat die fortschreitende Bewegung des Schwerpunktes zur Folge. Nun sind noch übrig die eine Hälfte der Stoßkraft, nämlich $\frac{P}{2}$ an C und eine Kraft $-\frac{P}{2}$ an D wirkend, welche zusammen ein Paar bilden, und die drehende Bewegung des Körpers um seinen Schwerpunkt bewirken. Das statische Moment dieses Paars ist aber $= p . \frac{P}{2} + p . \frac{P}{2} = Pp$, also gleich dem statischen Moment der ganzen Stoßkraft in Bezug auf den Schwerpunkt.

Hieraus geht hervor, daß eine excentrische Stoßkraft zwei Bewegungen erzeugt; eine fortschreitende Bewegung des Schwerpunktes, welche gerade so erfolgt, als gienge die Richtung der Stoßkraft durch den Schwerpunkt und eine drehende Bewegung um den Schwerpunkt,

welche so erfolgt, als wenn der Schwerpunkt festgehalten würde, und P allein wirkte.

Ist nun die Masse des Körpers M und die fortschreitende Geschwindigkeit desselben nach dem Stoße V, so hat man

$$V = \frac{P}{M} \quad . \; . \; . \; 1.$$

Bezeichnet ferner u die Winkelgeschwindigkeit und $\mathfrak{M}$ das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende Axe, normal zur Bildfläche, so hat man:

$$u = \frac{Pp}{\mathfrak{M}} \quad . \; . \; . \; 2$$

oder da P = MV ist, so wird auch

$$u = \frac{MVp}{\mathfrak{M}} \quad . \; . \; . \; 3.$$

Für eine homogene Kugel vom Radius r ist $\mathfrak{M} = \frac{2}{5}Mr^2$, daher hat man für diesen Körper

$$u = \frac{MVp}{\frac{2}{5}Mr^2} = \frac{5Vp}{2r^2}.$$

Somit ist die Umfangsgeschwindigkeit v derselben

$$v = ru = \frac{5Vp}{2r}.$$

§. 268.

Stoß zweier Körper, wovon einer mit einer festen Drehare verbunden ist. Ein Körper A, Fig. 209, stoße gegen den um die feste Axe C drehbaren Körper B. Der Stoß sei central in Bezug auf den erstern, dessen Masse M und Geschwindigkeit vor dem Stoße v sei. Die Drehaxe C sei normal zur Ebene der Figur, und die durch den Schwerpunkt S gehende Stoßrichtung liege in derselben Ebene, so daß die Stoßfläche normal zur Bildfläche angenommen wird. Das Perpendikel CD = p auf die durch den Schwerpunkt S und den Berührungspunkt E gehende Stoßrichtung ist der Hebelsarm der Stoßkraft. Ferner sei U die Winkelgeschwindigkeit des Körpers B vor dem Stoße, u die nach demselben, $\mathfrak{M}$ dessen Trägheitsmoment in Bezug auf die Axe C. Betrachtet man die Massen beider Körper im Punkte D vereinigt, so ist die des Körpers B dahin reducirte Masse gleich $\frac{\mathfrak{M}}{p^2}$, die des Körpers A ist M. Die Geschwindigkeit des Punktes D, also auch die der Masse $\frac{\mathfrak{M}}{p^2}$ vor dem Stoße, ist pU. Nach dem Stoße haben die Masse M und der Punkt D die gleiche Geschwindigkeit V, da beide Körper als unelastisch an-

genommen werden. Nun ist aber V = pu. Nach Gl. 4, §. 259, hat man sofort:

$$V = pu = \frac{Mv + \frac{\mathfrak{M}}{p^2} \cdot pU}{M + \frac{\mathfrak{M}}{p^2}}$$

daraus folgt die Winkelgeschwindigkeit von B nach dem Stoße

$$u = \frac{pMv + \mathfrak{M}U}{p^2M + \mathfrak{M}} \quad . \quad . \quad . \quad 1$$

und die Geschwindigkeit des Körpers A nach dem Stoß

$$V = \frac{p\,(pMv + \mathfrak{M}U)}{p^2M + \mathfrak{M}} \quad . \quad . \quad . \quad 2.$$

Ist der angestoßene Körper B vor dem Stoße in Ruhe, so hat man U = 0, daher:

$$u = \frac{Mvp}{p^2M + \mathfrak{M}} \quad . \quad . \quad . \quad 3$$

$$V = \frac{Mvp^2}{Mp^2 + \mathfrak{M}} \quad . \quad . \quad . \quad 4.$$

Wenn die Bewegung des zweiten Körpers gegen die des ersten gerichtet ist, so wird U negativ, also erhält man:

$$u = \frac{Mvp - \mathfrak{M}U}{Mp^2 + \mathfrak{M}} \quad . \quad . \quad . \quad 5$$

$$V = \frac{p\,(Mvp - \mathfrak{M}U)}{Mp^2 + \mathfrak{M}} \quad . \quad . \quad . \quad 6.$$

Ist der Körper A vor dem Stoß in Ruhe, dann wird v = 0. Hier haben alle Geschwindigkeiten eine negative Richtung, daher können wir sie für diesen Fall als positiv betrachten, und man erhält:

$$u = \frac{\mathfrak{M}U}{Mp^2 + \mathfrak{M}} \quad . \quad . \quad . \quad 7$$

$$V = \frac{\mathfrak{M}Up}{Mp^2 + \mathfrak{M}} \quad . \quad . \quad . \quad 8.$$

§. 269.

Wir wollen nun noch untersuchen, in welcher Entfernung von der Drehaxe der Körper B den ruhenden Körper A treffen müsse, damit die Geschwindigkeit des letztern so groß als möglich werde. Es ist:

$$V = \frac{\mathfrak{M}Up}{Mp^2 + \mathfrak{M}}.$$

Es wird nun für p = 0 und für p = ∞ auch V = 0. Um nun den Werth von p zu finden, für welchen V ein Maximum wird, entwickle man aus obiger Gleichung p, wodurch man erhält:

$$p = \frac{\mathfrak{M}U \pm \sqrt{\mathfrak{M}^2U^2 - 4M\mathfrak{M}V^2}}{2MV} \quad . \quad . \quad . \quad 1.$$

Der größte mögliche Werth von V ergibt sich offenbar, wenn der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen Null wird. Daher muß sein

$$4M\mathfrak{M}V^2 = \mathfrak{M}^2U^2$$

$$V = \frac{1}{2}U\sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{M}} \quad . \; . \; . \; 2.$$

Für einen größern Werth von V wird p imaginär. Setzt man diesen Werth in Gl. 1, so erhält man die correspondirende Entfernung der Stoßrichtung von der Drehare C:

$$p = \sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{M}} \quad . \; . \; . \; 3.$$

Denselben Werth für p erhält man auch für den Fall, wenn man die Entfernung sucht, in welcher der Körper A den B treffen müsse, damit die Winkelgeschwindigkeit des letztern ein Maximum werde. Man findet so diese Winkelgeschwindigkeit:

$$u = \frac{1}{2}v\sqrt{\frac{M}{\mathfrak{M}}} \quad . \; . \; . \; 4.$$

Ein ruhender, um eine Are drehbarer Körper, muß also in derselben Entfernung von einem freien Körper getroffen werden, um die größtmögliche Winkelgeschwindigkeit zu erlangen, in welchem er selbst den ruhenden freien Körper treffen muß, damit er diesem die größte Geschwindigkeit ertheile.

§. 270.

Ballistisches Pendel. Zur Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeiten der Geschütz- und Gewehrkugeln bedient man sich des **ballistischen Pendels**, des Pendels von **Robin**. Es besteht, Fig. 210, aus einem schweren um eine horizontale Are C drehbaren Körper BD, gegen welchen die Geschützkugeln abgeschossen werden. Durch den Stoß der Geschützkugel, die in dem Körper stecken bleibt, wird das Pendel aus seiner verticalen Lage gebracht und in schwingende Bewegung versetzt. Ein in der Schwingungsebene angebrachter Gradbogen EF dient dazu den Elevationswinkel kennen zu lernen, welchen das Pendel erreicht, mittelst dessen alsdann die Geschwindigkeit der Kugel bestimmt werden kann.

Bezeichnet CD = p den Abstand der Stoßrichtung BG von der Drehare, M die Masse der Kugel, v ihre Geschwindigkeit, $\mathfrak{M}$ das Trägheitsmoment der Masse des Pendels sammt der der Kugel, u die Winkelgeschwindigkeit desselben nach dem Stoße, so hat man nach §. 268 Gl. 3

$$u = \frac{Mvp}{Mp^2 + \mathfrak{M}} \quad . \; . \; . \; 1.$$

Ist k der Schwingungspunkt der Gesammtmasse des Pendels und der Kugel, so ist Ck = l die Länge des einfachen Pendels, das gleiche Schwingungszeit mit diesem zusammengesetzten hat. Es sei HCN = α der Elongationswinkel, h die Höhe, auf welche sich der

Schwingungspunkt erhebt, v′ die entsprechende Geschwindigkeit desselben, so ist $h = CK - CL = l - l \cos \alpha = l\,(1 - \cos \alpha)$; also

$$v' = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl\,(1 - \cos \alpha)}.$$

Dieß ist also die Anfangsgeschwindigkeit des Punktes K, mit welcher er zu steigen beginnt. Die Winkelgeschwindigkeit des Pendels ist daher

$$u = \frac{v'}{l} = \sqrt{\frac{2g\,(1 - \cos \alpha)}{l}} \quad \ldots 2.$$

Setzt man die Werthe von 1 und 2 einander gleich, so erhält man:

$$\frac{Mvp}{Mp^2 + \mathfrak{M}} = \sqrt{\frac{2g\,(1 - \cos \alpha)}{l}}$$

hieraus folgt die Geschwindigkeit der Geschützkugel

$$v = \frac{Mp^2 + \mathfrak{M}}{Mp} \cdot \sqrt{\frac{2g\,(1 - \cos \alpha)}{l}} \quad \ldots 3.$$

§. 271.

Mittelpunkt des Stoßes. Wenn ein fester um eine Axe sich bewegender Körper auf einen Widerstand trifft, oder von einem festen Körper einen Stoß erleidet, so erfolgt häufig eine Rückwirkung auf die Axe, und dieselbe erfährt eine Prellung oder Erschütterung. In dem sich drehenden Körper gibt es jedoch einen Punkt von der Eigenschaft, daß wenn die zur Axe normale Stoßrichtung durch denselben geht, die Axe keine Rückwirkung dadurch erfährt. Diesen Punkt heißt man den Mittelpunkt des Stoßes.

Um denselben im einfachsten Falle zu bestimmen, nehmen wir an, eine feste gerade Linie, Fig. 211, drehe sich um die zur Ebene des Papiers normale Axe C mit einer Winkelgeschwindigkeit gleich u. In den Entfernungen $CB = r$ und $CB' = r'$ trage sie die trägen Massen m, m′. Der Punkt A in der Entfernung $CA = x$ sei der Mittelpunkt des Stoßes. Die Geschwindigkeiten der Massen sind ru, r′u; daher ihre Trägheitskräfte mru und m′r′u. Soll nun durch den zur Axe normalen Stoß auf A die Axe keine Erschütterung erfahren, so müssen die statischen Momente dieser Kräfte in Bezug auf den Punkt A einander gleich, oder ihre algebraische Summe Null sein. Daher muß stattfinden:

$$mru \,.\, AB = m'r'u \,.\, AB'$$

$$mru\,(x - r) = m'r'u\,(r' - x)$$

hieraus ergibt sich: $x\,(mr + m'r') = mr^2 + m'r'^2$

also die Entfernung des Stoßmittelpunktes:

$$x = \frac{mr^2 + m'r'^2}{mr + m'r'}.$$

Enthält das System mehrere materielle Punkte m, m′, m″ . . ., die sich um C schwingen in den Abständen r, r′, r″ . . ., so erhält man auf dieselbe Art den Abstand des Stoßmittelpunktes von C

$$x = \frac{mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \ldots}{mr + m'r' + m''r'' + \ldots}$$

Ist das System ein fester Körper, M dessen Masse, z die Entfernung seines Schwerpunktes von der Drehaxe, $\mathfrak{M}$ sein Trägheitsmoment, so ist

$$mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \ldots = \mathfrak{M}$$
$$mr + m'r' + m''r'' + \ldots = Mz,$$

daher erhält man für denselben:

$$x = \frac{\mathfrak{M}}{Mz}.$$

Man erhält also den Abstand des Mittelpunktes des Stoßes von der Drehaxe, wenn man das Trägheitsmoment des Körpers durch das statische Moment seiner Masse dividirt.

Man sieht auch hieraus, daß der Mittelpunkt des Stoßes dieselbe Entfernung von der Drehaxe hat, wie der Mittelpunkt des Schwungs.

Soll die Hand beim Aufschlagen eines Hammers keine Prellung erleiden, so muß der Schlag durch den Mittelpunkt des Stoßes gehen. Dasselbe muß auch bei Hammerwerken beobachtet werden, weil sonst in der Axe oder Hammerhülse nachtheilige Erschütterungen entstehen.

Für eine prismatische Stange, Fig. 212, die in A mit der Hand gefaßt wird, sei C der Stoßmittelpunkt, AB ihre Länge. Nun ist bekanntlich $\mathfrak{M} = \frac{1}{3} l^2$, $Mz = \frac{1}{2}$, daher

$$AC = x = \frac{\frac{1}{3} l^2}{\frac{1}{2} l} = \frac{2}{3} l.$$

Es muß also diese Stange in der Entfernung von $\frac{2}{3}$ ihrer Länge vom Angriffspunkt an aufgeschlagen werden, wenn die Hand keinen Stoß erleiden soll.

Dritter Abschnitt.

Hydrostatik.

Erstes Kapitel.

Von dem Gleichgewichte und dem Druck des Wassers.

§. 272.

Einleitung. Die flüssigen Körper unterscheiden sich von den festen wesentlich durch den äußerst geringen Zusammenhang ihrer Theile; dadurch sind dieselben sehr beweglich und verschiebbar und lassen sich durch noch so kleine Kräfte von einander trennen. Darauf beruht die charakteristische Eigenschaft der Fortpflanzung des Druckes. Sie nehmen immer die Form des Gefäßes an, in welches sie gebracht werden. Man unterscheidet namentlich zwei Arten von flüssigen Körpern, nämlich die tropfbarflüssigen und elastischflüssigen. Die tropfbarflüssigen auch unausdehnsame, incompressible Körper lassen sich durch bedeutende Kräfte nur äußerst wenig zusammendrücken, so daß man sie als unzusammendrückbar betrachten kann. Versuchen zufolge läßt sich luftfreies Wasser unter dem Drucke von einer Atmosphäre um 50 Millionstel seines Volumens zusammenpressen.

Nicht alle tropfbarflüssigen Körper sind in gleichem Grade flüssig; z. B. Wasser, Oel, Quecksilber, Mörtel besitzen diese Eigenschaft in verschiedenem Grade. Das Wasser ist von allen tropfbarflüssigen Körpern auf der ganzen Erde am meisten verbreitet, es wird daher auch als Repräsentant der tropfbarflüssigen Körper betrachtet. Wir werden daher in der Hydrostatik auch vorzugsweise vom Wasser sprechen, und dafür die Gesetze herleiten, welche sofort auf alle tropfbare Flüssigkeiten anwendbar sind.

Die elastischflüssigen, ausdehnsamen, zusammendrückbaren, auch luftförmigen Körper haben die Fähigkeit, einen größern oder kleinern Raum einzunehmen, indem sie sich stark zusammenpressen lassen, und nach aufgehobenem Drucke sich immer weiter ausdehnen. Dazu gehören die atmosphärische Luft und alle Gasarten. Wir werden diese später betrachten.

§. 273.

Princip der Fortpflanzung des gleichen Drucks. Wenn auf einen festen Körper nach irgend einer Richtung ein Druck ausgeübt wird, so pflanzt sich dieser nach keiner andern Richtung fort, sondern ist nur nach seiner anfänglichen Richtung wirksam. Die Flüssigkeiten besitzen aber außer den oben angeführten Eigenschaften noch eine andere sehr merkwürdige Eigenschaft, wodurch sie sich wesentlich von den festen unterscheiden, und welche in folgendem Satze ausgesprochen ist, nämlich:

Ein Druck, der auf einen Theil der Oberfläche einer in einem Gefäße eingeschlossenen Flüssigkeit ausgeübt wird, pflanzt sich nach allen Richtungen gleich stark fort. Dieß ist das Grundprincip der Hydrostatik.

Nehmen wir an, ein Gefäß E, Fig. 213, sei mit Wasser gefüllt, dessen Gewicht vorderhand außer Acht gelassen wird, und es habe dasselbe mehrere gleich große Oeffnungen A, B, C, D, die mit genau passenden Kolben geschlossen seien. Wird nun der Kolben A mit einer gewissen Kraft einwärts gedrückt, so werden alle Wasserschichten und Gefäßtheile diesen Druck empfinden. Sollen nun die Kolben B, C, D hierdurch nicht auswärts weichen, oder soll das Gleichgewicht nicht gestört werden, so muß offenbar jeder Kolben mit der gleichen Kraft einwärts gedrückt werden, wie der Kolben A. Sind die Kolbenflächen ungleich groß, so werden auch die Pressungen gegen dieselben ungleich sein, und es wird auf die zweifache Fläche der doppelte Druck, auf die dreifache ein dreifacher Druck ausgeübt werden. Auf gleiche Weise verhält es sich mit allen ebenen Theilen der Gefäßwände.

Sind nun F und f zwei ebene Flächen, P und p die Normaldrücke gegen dieselben, so verhält sich

$$P:p = F:f$$

d. h. die Pressungen, welche ebene Flächen in den Wänden eines Gefäßes in Folge der Einwirkung äußerer Kräfte erleiden, verhalten sich wie die Flächen.

Aus obiger Proportion folgt: $\frac{P}{F} = \frac{p}{f} = q$, oder der Druck auf die Quadrateinheit, welcher also stets der gleiche ist. Diesen Druck erleidet auch jede Quadrateinheit der Oberfläche eines in die Flüssigkeit getauchten Körpers.

§. 274.

Druck auf eine krumme Fläche nach einer bestimmten Richtung. Erleidet eine krumme Fläche in allen Punkten den gleichen Normaldruck, so kann man den Gesammtdruck, welcher auf einen Flächentheil nach einer bestimmten Richtung ausgeübt wird, auf folgende Weise finden.

Es sei ADB, Fig. 214, die krumme Fläche, und CD die Richtung, nach welcher der Druck bestimmt werden soll. Man zerlege die Fläche in unendlich viele unendlich kleine Theile, die man alle als

ebene Elemente betrachten kann. Die Inhalte derselben seien f′, f″, f‴ . . .; die Winkel, welche ihre Richtungen mit einer auf der gegebenen Richtung CD rechtwinkelig stehenden Ebene MN bilden, seien α', α'', α''' . . . Dieses sind nun auch die Winkel, welche die Normallinien auf die Flächenelemente mit der gegebenen Richtung selbst bilden. Ist nun q der Normaldruck auf die Flächeneinheit, so sind qf′, qf″, qf‴ . . . die Normaldrücke auf die Flächenelemente. Diese Normaldrücke zerlege man in zwei rechtwinkelige Seitendrücke, parallel und normal zur gegebenen Richtung. Die normalen Seitendrücke haben nun keinen Einfluß auf den fraglichen Druck und können daher unberücksichtigt bleiben. Die parallelen Seitendrücke sind $qf' \cos \alpha'$, $qf'' \cos \alpha''$, $qf''' \cos \alpha'''$ . . . und bilden zusammen den Druck nach der gegebenen Richtung. Daher ist der Gesammtdruck

$$q\,(f' \cos \alpha' + f'' \cos \alpha'' + f''' \cos \alpha''' + \ldots).$$

Setzt man den Inhalt der Projection der krummen Fläche auf die Ebene MN gleich J, so ist

$$J = f' \cos \alpha' + f'' \cos \alpha'' + f''' \cos \alpha''' + \ldots$$

Folglich ist der Gesammtdruck D nach der gegebenen Richtung

$$D = qJ.$$

Der Druck, den demnach die krumme Fläche nach einer gegebenen Richtung auszuhalten hat, ist gleich dem Druck, welchen die Projection dieser Fläche auf eine zur gegebenen Richtung rechtwinkelige Ebene auszuhalten hätte, wenn auf sie in allen Punkten der gleiche Normaldruck wirkte.

§. 275.

Hydrostatische Presse. Eine für die Industrie sehr wichtige Anwendung findet das Princip des gleichen Druckes bei der hydrostatischen oder auch hydraulischen Presse von Brahma, Fig. 215. Es können mittelst derselben durch verhältnißmäßig geringe Kräfte sehr bedeutende Pressungen auf geringe Entfernungen ausgeübt werden. Sie besteht der Hauptsache nach aus zwei Cylindern A, B von sehr ungleichen Durchmessern, welche durch eine Röhre C mit einander in Verbindung stehen. Der kleine Cylinder ist mit einem genau luft- und wasserdicht schließenden Druckkolben D versehen, welcher noch mit einem Hebel FG in H verbunden ist. Der größere Cylinder enthält gleichfalls einen wasserdicht schließenden Preßkolben E, welcher eine Preßplatte K trägt. Die Verbindungsröhre ist mit einem Sicherheitsventil V versehen und am kleinen Cylinder ist eine Saugröhre mit Ventil angebracht, durch welche beim Heben des Druckkolbens aus einem Gefäße X Wasser in den Cylinder geführt wird. Beim Abwärtsgehen des Druckkolbens schließt sich das Ventil der Saugröhre und das Wasser geht durch die Verbindungsröhre unter den Preßkolben, wodurch dieser gehoben wird. Somit werden die zwischen der Preßplatte und dem Preßgestelle L befindlichen Körper durch fortgesetztes Auf- und Abbewegen des Druckkolbens zusammengepreßt.

Um nun die Gleichung für diese Presse herzuleiten, sei F der Drehpunkt des Hebels, H der Verbindungspunkt desselben mit dem Druckkolben, G der Angriffspunkt der Kraft P; FG = A, und FH = a die Hebelsarme, x die Kraft im Punkte H, mit welcher der Druckkolben abwärts getrieben wird, d der Durchmesser des kleinen, D der des großen Cylinders, Q die Kraft, mit welcher der Preßkolben aufwärts getrieben wird, oder die Last. Man hat nun $x = \frac{P.A}{a}$.

Nach dem Princip des gleichen Drucks muß nun stattfinden, da $\frac{d^2\pi}{4}$ und $\frac{D^2\pi}{4}$ die beiden Kolbenflächen sind

$$x:Q = \frac{d^2\pi}{4} : \frac{D^2\pi}{4} = d^2:D^2$$

oder für x den obigen Werth gesetzt:

$$\frac{P.A}{a}.Q = d^2:D^2.$$

Hieraus folgt die Kraft

$$P = Q.\frac{a.d^2}{A.D^2} \ldots 1$$

und die Last

$$Q = P.\frac{A.D^2}{a.d^2} \ldots 2.$$

Finden z. B. die Dimensionen statt: d = 1, D = 20, a = 1, A = 10, so ist $P = \frac{Q}{4000}$ oder Q = 4000 P. Wirkt nun ein Arbeiter am Hebel mit P = 20 Kilogramm Kraft, so kann derselbe einen Druck von Q = 4000.20 = 80000 Kilgr. ausüben.

Die Reibung absorbirt zwar etwa den dritten Theil der Wirkung, allein demohngeachtet ist diese Presse gegen die Spindelpressen in entschiedenem Vortheil, da bei letztern die Reibung bedeutend größer ist.

Um die Gleichung für diese Presse mittelst des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten herzuleiten, sei s der Weg, den der Druckkolben oder die Kraft x abwärts zurücklegt, während der Preßkolben oder die Last Q um den Weg s′ sich hebt. Das aus dem kleinen Cylinder verdrängte Wasservolumen ist $\frac{d^2\pi}{4}.s$. Dieses muß nun übertreten in den großen Cylinder, woselbst es den Raum $\frac{D^2\pi}{4}.s'$ einnimmt. Beide Volumina sind aber einander gleich, daher ist

$$\frac{d^2\pi}{4}.s = \frac{D^2\pi}{4}.s' \ldots 1.$$

Nun muß stattfinden:

$$x.s = Q.s'$$

oder

$$\frac{P.A}{a}.s = Q.s' \ldots 2.$$

Aus 1 folgt aber $s' = \frac{d^2 s}{D^2}$, daher erhält man durch Substitution in in Gleich. 2 den Ausdruck

$$\frac{P.A}{a}.s = \frac{Q.d^2.s}{D^2}$$

also

$$P = Q.\frac{a.d^2}{A.D^2}.$$

§. 276.

Wasserspiegel. Die Oberfläche des Wassers nennt man den Wasserspiegel. Wenn Wasser in einem oben offenen Gefäße eingeschlossen ist, so kann es nur dann in Ruhe sein, wenn die Oberfläche eine horizontale auf der Richtung der Schwere normal stehende Ebene bildet. Nehmen wir an, die Oberfläche des Wassers in dem Gefäße Fig. 216 habe die gebogene Gestalt ACB. Sei E irgend ein Wassertheilchen in dieser Linie, so wird man annehmen können, es befinde sich auf einer schiefen Ebene. Zerlegt man das vertical nach EK abwärts wirkende Gewicht dieses Elements in zwei Seitenkräfte normal und parallel zur schiefen Fläche, so wird letztere EF eine Bewegung des Elementes auf derselben herab zur Folge haben. So verhält es sich mit allen andern Elementen der krummen Oberfläche, und es wird das Wasser nicht eher zu Ruhe kommen, bis sämmtliche Elemente der Oberfläche normal zur Richtung der Schwere sind oder dieselbe eine horizontale Ebene bildet.

Dieß kann bei Behältern von geringem Umfange als richtig angenommen werden. Hat aber die Oberfläche eine größere Ausdehnung wie bei Seen, Meeren, so bildet die ruhige Oberfläche keine Ebene, sondern einen Theil einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt mit dem Centrum der Erde zusammenfällt.

§. 276.

Bodendruck. Wenn sich Wasser in einem Gefäße befindet, so ist klar, daß die tiefer liegenden Elemente stärker gedrückt werden als die höher gelegenen, da jene das Gewicht der über ihnen liegenden Wassertheile zu tragen haben. Nehmen wir ein beliebig gestaltetes Gefäß, Fig. 217, mit horizontalem Boden CD und suchen den Druck, welchen dieser durch das Gewicht des Wassers zu erleiden hat.

Es sei H die Druckhöhe oder der verticale Abstand des Wasserspiegels AB von der horizontalen Bodenfläche, Π das Gewicht einer Kubikeinheit Wasser. Man theile die ganze Wassermasse durch viele sehr nahe gelegene horizontale Schnitte EF, GH, JK ... in lauter horizontale Schichten von gleicher Höhe h. Der Inhalt der Oberfläche sei i′, der der folgenden Schnittflächen i″, i‴ ... und der der Grundfläche J. Ferner werde vorausgesetzt, auf die Oberfläche sei ein Druck Q gleichförmig verbreitet, etwa der Druck der Atmosphäre oder die Wirkung eines genau passenden Kolbens. Es ist nun offen-

bar, daß die Oberfläche nur diesen Druck zu tragen hat. Die Schnittfläche EF hat aber diesen Druck und noch dazu das Gewicht der ersten Wasserschichte ABEF zu tragen. Das Gewicht dieser Schichte ist aber $i'h\Pi$, daher der gesammte Druck auf die zweite Schichte $= Q + i'h\Pi$. Dividirt man diesen Ausdruck durch den Flächeninhalt des Schnittes EF, so erhält man den Druck p' auf jede Quadrateinheit der zweiten Schichte oder auf die Grundfläche der ersten Schichte $p' = \frac{Q}{i''} + \frac{i'}{i''} h\Pi$; setzt man $\frac{Q}{i''} = q$ und $i' = i''$, da diese Flächen unendlich nahe liegen und somit ohne Fehler als gleich groß angesehen werden können, so wird

$$p' = q + h\Pi.$$

Auf jede Quadrateinheit der dritten Schichte oder auf die Grundfläche der zweiten wirkt nun p' und das Gewicht der zweiten Schichte, welches der Quadrateinheit entspricht, nämlich $h\Pi$, also ist der Druck p'' für die Quadrateinheit dieser Schichte:

$$p'' = q + h\Pi + h\Pi = q + 2h\Pi.$$

Auf gleiche Weise erhält man den Druck p''' für die Quadrateinheit der auf die Grundfläche der dritten Schichte:

$$p''' = q + 2h\Pi + h\Pi = q + 3h\Pi.$$

Demnach wird der Druck p^n gegen die Grundfläche der n^{ten} Schichte oder der Druck auf die Quadrateinheit der Bodenfläche sein:

$$p^n = q + nh\Pi = q + H\Pi$$

da $nh = H$ ist.

Somit erhält man den Druck P, welchen der ganze Boden des Gefäßes erleidet:

$$P = Jq + J.H.\Pi \;.\;.\;.\; 1.$$

Wird auf die Oberfläche kein Druck ausgeübt, so ist $q = 0$ und

$$P = J.H.\Pi \;.\;.\;.\; 2.$$

Der Wasserdruck, welchen der horizontale Boden eines Gefäßes erleidet, ist gleich dem Gewicht einer Wassersäule, welche den Boden zur Grundfläche und die Höhe des Wasserspiegels über dem Boden zur Höhe hat.

Dieser Satz ist gültig für Gefäße jeglicher Gestalt mit horizontalem Boden. Es mag das Gefäß nach oben sich erweitern, wie Fig. 218, oder verengen, wie Fig. 219, gerad oder schief stehen, alles dieß ändert obigen Satz nicht, wie dieß aus obiger Herleitung selbst folgt.

Bei einem Gefäße, das oben enger wird, Fig. 219, ist, wie leicht einzusehen, der Wasserdruck auf den Boden größer als das Gewicht des in demselben enthaltenen Wassers, weßhalb man auch diesen Satz das hydrostatische Paradoxon nennt.

Aufg. Ein Gefäß mit kreisförmiger Grundfläche ist bis zur Höhe von 2 Meter mit Wasser gefüllt; welchen Druck erleidet dadurch der Boden, dessen Durchmesser 1 Meter beträgt?

Aufl. Nach Gl. 2 ist $J = \frac{1^2 . 3{,}14}{4}$; $H = 2$; $\Pi = 1000$,

daher der Bodendruck

$$P = \frac{1^2 . 3{,}14 . 2 . 1000}{4} = 1570 \text{ Kilgr.}$$

§. 277.

Wenn ein Gefäß, Fig. 220, bis AB mit Wasser gefüllt ist und bei DE durch eine horizontale Ebene geschlossen, so erleidet diese von unten nach oben einen Druck, der gleich dem Gewicht einer Wassersäule KDEM ist, welche diese Ebene zur Grundfläche und zur Höhe den verticalen Abstand derselben vom Wasserspiegel hat. Denn denkt man sich die horizontale Ebene ED verlängert, so schneidet sie die Wassersäule in LG. Die Fläche LG hat aber den Druck der darüber ruhenden Wassersäule auszuhalten. Dieser Druck pflanzt sich nun gleichmäßig nach allen Richtungen fort, somit erfährt jede Flächeneinheit der Ebene DE den gleichen Druck, welcher der Einheit der Ebene LG zukommt. Es hat also die Ebene DE im Ganzen einen Druck auszuhalten, der gleich dem Gewichte der Wassersäule KDEM ist.

Diese Gesetze finden ihre Anwendung z. B. beim anatomischen Heber, bei der Real'schen Filtrir- oder Auflösungspresse. Hiernach ist auch zu beurtheilen, wie wichtig es ist, bei Schleußenbauten darauf zu sehen, daß das Wasser nicht unter den Schleußenboden treten kann, da derselbe dann in Gefahr kommt, vom Wasserdruck aufgebrochen zu werden.

§. 278.

Seitendruck. Um nun den Wasserdruck auf eine geneigte oder verticale ebene Seitenwand AB oder AC, Fig. 221, zu bestimmen, theile man dieselbe durch horizontale Schnitte in unendlich viele unendlich schmale Theile, so daß man sie als horizontale Flächenelemente betrachten kann. Es sei J der Inhalt der ganzen gedrückten Ebene; i', i'', i''' ... die Inhalte der Flächenelemente; h', h'', h''' ... ihre Abstände von dem Wasserspiegel; Π das Gewicht einer Kubikeinheit Wasser; P der Gesammtdruck auf die Ebene. Nun sind die Normalpressungen auf die einzelnen Elemente:

$$i'h'\Pi,\ i''h''\Pi,\ i'''h'''\Pi \ldots$$

Die Summe dieser Pressungen gibt offenbar den Gesammtdruck auf die Seitenwand. Demnach ist

$$P = \Pi\,(i'h' + i''h'' + i'''h''' + \ldots).$$

Die in den Klammern enthaltene Größe ist aber die Summe der Momente der Flächenelemente in Bezug auf die Ebene des Wasserspiegels. Bezeichnet H den Abstand des Schwerpunktes der gedrückten Seitenwand vom Wasserspiegel, so hat man nach der Lehre vom Schwerpunkt:

$$J.H = i'h' + i''h'' + i'''h''' + \ldots$$

Somit folgt:

$$P = J.H.\Pi \ldots 1.$$

Der Wasserdruck auf eine geneigte oder verticale Ebene ist also gleich dem Gewichte eines Wasserprismas,

das die gedrückte Fläche zur Grundfläche und den Abstand des Schwerpunktes derselben vom Wasserspiegel zur Höhe hat.

Wird auf jede Quadrateinheit der Oberfläche noch ein Druck q ausgeübt, so erhält man den Seitendruck:

$$P = J.H.\Pi + Jq \quad . \; . \; . \; 2.$$

Der ausgesprochene Satz ist allgemein und gilt somit für jede vom Wasser gedrückte Ebene von jeglicher Form und Lage. Auch verdient bemerkt zu werden, daß hierbei die horizontale Ausdehnung der Wassermasse gar nicht in Betracht kommt. Es mag hinter der Ebene eine begrenzte Wassermasse, wie in einem Gefäße, oder eine unbegrenzte, wie bei Flüssen, Seen, Meeren, wo das Wasser gegen die Dämme drückt, sich befinden.

Aufg. Hinter einer verticalen, rechteckigen, 2 Meter breiten Schütze steht das Wasser 1,6 Meter hoch. Welche Kraft ist nöthig, um dieselbe aufzuziehen, wenn der Reibungscoefficient in den Fugen 0,3 ist.

Aufl. Zur Bestimmung des Wasserdrucks gegen die Schütze dient Gl. 1. Hier ist $J = 1,6.2$; $H = 0,8$; $\Pi = 1000$ Kilgr., daher

$$P = 1,6.2.0,8.1000 = 2560 \text{ Kilgr.}$$

Die Reibung in den Fugen beträgt also $2560.0,3 = 768$ Kilgr.

Somit ist zum Aufziehen der Schütze, wenn deren Gewicht unberücksichtigt bleibt, eine Verticalkraft von 768 Kilgr. nothwendig.

§. 279.

Den Normaldruck auf eine geneigte Ebene kann man auch als Mittelkraft von einem Horizontal- und Verticaldruck ansehen. Bezeichnet Fig. 221 h den Horizontaldruck, v den Verticaldruck, α den Neigungswinkel der Ebene gegen den Horizont, so ist

$$h = P.\sin\alpha = J.H.\sin\alpha.\Pi$$
$$v = P\cos\alpha = J.H.\cos\alpha.\Pi.$$

Nun ist aber $J\sin\alpha$ die Verticalprojection der gedrückten Fläche, $J.\cos\alpha$ die Horizontalprojection derselben. Man erhält also den Horizontaldruck oder Verticaldruck auf eine geneigte Ebene, wenn man den Abstand ihres Schwerpunktes vom Wasserspiegel mit der Vertical- oder Horizontalprojection und mit dem Gewichte einer Kubikeinheit Wasser multiplicirt.

§. 280.

Druck gegen krumme Seitenflächen. Wenn man den Wasserdruck auf eine krumme Seitenfläche nach horizontaler Richtung bestimmen will, so zerlege man die Fläche in unendlich viele unendlich kleine Elemente, die man als ebene Flächenelemente betrachten kann. Die Inhalte derselben seien i', i'', i''' . . . ihre Abstände von der Oberfläche des Wassers h', h'', h''' . . .; die Neigungswinkel gegen eine auf der horizontalen Richtung rechtwinkelig stehenden Ebene α', α'', α''' . . . Dieses sind nun auch die Winkel, welche die Normallinien auf die Elemente mit der gegebenen Richtung bilden. Die Normaldrücke sind nun $i'h'\Pi$, $i''h''\Pi$, $i'''h'''\Pi$ . . . Zerlegt man diese

in horizontale und verticale Seitenkräfte, so haben die verticalen keinen Einfluß auf den Seitendruck und können unberücksichtigt bleiben. Die horizontalen Kräfte sind $i'h'\Pi \cos \alpha'$, $i''h''\Pi \cos \alpha''$ . . . Demnach ist der Gesammtdruck P nach horizontaler Richtung:

$$P = \Pi\,(i' \cos \alpha'.h' + i'' \cos \alpha''.h'' + i''' \cos \alpha'''.h''' + \ldots$$

Nun sind $i' \cos \alpha'$, $i'' \cos \alpha''$, $i''' \cos \alpha'''$ . . . die Inhalte der Projectionen der Elemente auf die Verticalebene und somit die Größen in den Klammern die Momente der Projectionen der Elemente in Bezug auf den Wasserspiegel. Ist J die Projection der krummen Fläche, H der Abstand des Schwerpunktes derselben vom Wasserspiegel, so ist bekanntlich:

$$J.H = i' \cos \alpha'.h' + i'' \cos \alpha''.h'' + i''' \cos \alpha'''.h''' + \ldots$$

Also

$$J.H.\Pi = \Pi\,(i' \cos \alpha'.h' + i'' \cos \alpha''.h'' + i''' \cos \alpha'''.h''' + \ldots)$$

Folglich der Seitendruck nach horizontaler Richtung:

$$P = J.H.\Pi.$$

Man findet also den horizontalen Seitendruck des Wassers auf eine krumme Fläche, wenn man den Inhalt ihrer Verticalprojection mit dem Abstand des Schwerpunktes der letztern vom Wasserspiegel und mit dem Gewichte einer Kubikeinheit Wasser multiplicirt.

Aufg. Ein verticalstehendes cylindrisches Gefäß von 1,5 Meter Durchmesser ist bis zur Höhe von 3 Meter mit Wasser gefüllt; welches ist der Seitendruck?

Aufl. Mit Bezug auf obige Gleichung hat man $J = 1{,}5.3 = 4{,}5$ als Verticalprojection des halben Cylindermantels; $H = \frac{3}{2} = 1{,}5$; $\Pi = 1000$, folglich

$$P = 4{,}5.1{,}5.1000 = 6750 \text{ Kilgr.}$$

§. 281.

Der horizontale Wasserdruck ist auf alle Punkte der Gefäßwand, die gleich tief oder in derselben horizontalen Ebene liegen, ganz gleich. Es heben sich daher diese nach verschiedenen Richtungen wirkenden Horizontaldrücke gegenseitig auf. Wenn aber an irgend einer Stelle a, Fig. 222, einer Gefäßwand eine Oeffnung gemacht wird, so fließt das Wasser aus und es findet daselbst kein Druck mehr statt. Auf der gegenüber liegenden gleich großen Stelle b ist aber in gleicher Höhe der Druck noch vorhanden, welcher sich bestrebt, das Gefäß in der Richtung ab horizontal fortzubewegen. Wenn dieser Druck stärker ist als die Reibung an der Grundfläche des Gefäßes, so wird die Bewegung erfolgen. Diese Wirkung des einseitigen Druckes nennt man die Reaktion des ausfließenden Wassers. Eine Anwendung davon gibt z. B. das Segner'sche Wasserrad.

§. 282.

Mittelpunkt des Druckes. Man kann sämmtliche Elementarpressungen auf eine Ebene als ein System von parallelen Kräften

betrachten und den resultirenden Gesammtdruck als die Mittelkraft derselben. Den Angriffspunkt dieser resultirenden Druckkraft nennt man den **Mittelpunkt des Drucks**. Bei einer horizontalen Ebene wird der Mittelpunkt des Drucks mit dem Schwerpunkt zusammenfallen, da alle Flächenelemente gleichen Druck erleiden. Bei einer geneigten Ebene aber muß dieser Punkt tiefer liegen als der Schwerpunkt, weil der Druck auf gleiche Flächenelemente mit der Tiefe zunimmt.

Um nun den Mittelpunkt des Drucks zu bestimmen, nehme man in der gedrückten Ebene eine Momentenaxe an, suche die Momente sämmtlicher Elementarpressungen in Bezug auf diese Axe und dividire diese Momentensumme durch den Gesammtdruck auf die Ebene, alsdann erhält man den Abstand des Mittelpunkts des Drucks von dieser Axe. Ebenso verfahre man in Bezug auf eine zweite in gleicher Ebene liegende Axe, welche die erste schneidet. Man kennt sodann die Abstände des Punktes von zwei gegebenen Axen, und somit ist derselbe vollkommen bestimmt.

§. 283.

Mittelpunkt des Drucks für ein Rechteck. Es sei h die Höhe des Rechteckes, b die horizontale Seite, α der Neigungswinkel desselben gegen den Horizont. Das Wasser stehe bis zur obersten Kante, so daß diese im Wasserspiegel liege. Es ist zuförderst klar, daß der Mittelpunkt des Drucks in der Mittellinie liegen muß, welche die beiden horizontalen Seiten halbirt, weil auf den beiden Hälften die Drücke auf die gleichliegenden Elemente ganz gleich sind. Diese Linie ist also eine Schwerlinie, in welcher der fragliche Punkt liegen muß. Man hat nun noch die Entfernung dieses Punktes von der obern horizontalen Seite, die wir als Momentenaxe annehmen, zu bestimmen. Zu diesem Zwecke theile man das ganze Rechteck durch horizontale Schnitte in unendlich viele unendlich schmale Elemente von der Breite d. Man nehme in dem Rechteck zwei Horizontallinien in den Entfernungen x und x + d von der Momentenaxe. Der Normaldruck auf das zwischen beiden Linien enthaltene Element ist $b.d.x \sin \alpha.\Pi$, folglich sein Moment in Bezug auf die Axe $= bdx^2 \sin \alpha.\Pi$. Setzt man nun der Reihe nach 0d, 1d, 2d, 3d ... nd für x, so erhält man die Momente der einzelnen Elementarpressungen in Bezug auf die obere Seite. Die Summe aller dieser Momente ist gleich $bd^3 (0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2) \sin \alpha.\Pi = \frac{bd^3n^3}{3}.\sin \alpha\Pi$.

Nun ist $h = nd$, also die Summe der Momente

$$= \frac{bh^3 \sin \alpha\Pi}{3}.$$

Es sei z der Abstand des Mittelpunkts des Drucks von der Axe, so ist das Moment des Gesammtdrucks $= bh.\frac{h}{2}.\sin \alpha.\Pi.z$; folglich erhält man die Gleichung

$$\frac{b.h^2.\sin\alpha\Pi}{2}.z = \frac{bh^3 \sin\alpha.\Pi}{3},$$

und daraus ergibt sich

$$z = \frac{2}{3}.h.$$

Der Mittelpunkt des Drucks von einem Rechteck liegt also in $\frac{2}{3}$ seiner Höhe vom Wasserspiegel entfernt.

§. 284.

In einer schiefen Wand AB, Fig. 223, befinde sich ein Rechteck von der Höhe BC = h und der horizontalen Seite = b. Die Entfernung der obern Kante desselben von der Durchschnittslinie der Wand mit dem Wasserspiegel sei AC = y, die Entfernung des Mittelpunkts des Drucks auf das Rechteck AD = z, der Neigungswinkel gegen den Horizont = α. Mit Bezug auf die Herleitung im vorigen §. ist das Moment sämmtlicher Elementarpressungen auf die ganze Fläche AB gleich $\frac{b\,(y+h)^3 \sin\alpha.\Pi}{3}$, und auf AC gleich $\frac{by^3 \sin\alpha\Pi}{3}$, daher die Summe der Momente der Pressungen auf das Rechteck BC gleich $\frac{b\,(y+h)^3 \sin\alpha\Pi}{3} - \frac{bh^3 \sin\alpha\Pi}{3}$. Der Normaldruck auf das Rechteck ist gleich $\frac{1}{2}\,b\,(y+h)^2 \sin\alpha\Pi - \frac{1}{2}by^2 \sin\alpha\Pi$. Das Moment dieses Drucks muß nun gleich sein der Summe jener Momente, daher ist

$$z\left[\frac{1}{2}\,b\,(y+h)^2 \sin\alpha\Pi - \frac{1}{2}\,by^2 \sin\alpha\Pi\right] = \frac{b\,(y+h)^3 \sin\alpha\Pi}{3} - \frac{bh^3}{3}\sin\alpha\Pi.$$

Hieraus folgt:

$$z = \frac{2}{3}.\frac{3y^2 + 3yh + h^2}{2y + h}.$$

Diese Gleichung gilt auch für eine verticale Wand.

§. 285.

Mittelpunkt des Drucks bei einem Dreieck. Es sei ABC, Fig. 224, ein verticales Dreieck, die eine Seite AB = b liege im Wasserspiegel, die Höhe sei DC = h, z der Abstand des Mittelpunktes des Drucks von AB. Man theile das Dreieck durch horizontale Schnitte in unendlich viele Elemente von gleicher Höhe d, so daß h = nd ist. Ein solches Element sei GKML, dessen Breite EF = d, die Entfernung DE = x also FD = x + d. Nun verhält sich GK : b = (h — x) : h, demnach ist GK = $\frac{b}{h}$ (h — x). Da nun d unendlich klein ist, so hat man den Wasserdruck auf dieses

Element $= \frac{b}{h}$ (h — x) d.xΠ, folglich das Moment dieses Drucks in Bezug auf den Wasserspiegel gleich

$$\frac{b}{h} (h - x) \,.\, x^2 d\Pi.$$

Setzt man nun in diesen Ausdruck der Reihe nach 0d, 1d, 2d ... nd für x, und addirt die Resultate, so erhält man die Summe der Momente der Elementardrücke gleich $\frac{1}{12}$ bh$^3\Pi$. Der Wasserdruck auf das Dreieck ist aber $= \frac{1}{6}$ bh$^2\Pi$, also dessen Moment $\frac{1}{6}$ bh$^2\Pi$. z. Man erhält daher die Gleichung:

$$\frac{1}{6}\, bh^2\Pi . z = \frac{1}{12}\, bh^3\Pi$$

und daraus
$$z = \frac{1}{2}\, h.$$

Liegt die Spitze dieses Dreiecks im Wasserspiegel, so findet man auf gleiche Weise die Entfernung des Mittelpunktes des Drucks vom Wasserspiegel

$$z' = \frac{3}{4}\, h.$$

§. 286.

Communicirende Röhren. Man versteht darunter solche Röhren oder Gefäße, die so mit einander verbunden sind, daß das Wasser aus dem einen ungehindet in die andern übertreten kann, die Gestalt mag dabei sein, welche sie will. Es seien **AKMB** und **MCDL**, Fig. 225, zwei communicirende mit Wasser gefüllte Gefäße, **AB** und **CD** die Wasserspiegel. Man führe irgendwo durch die Verbindungsröhre einen Schnitt **EF**. Der Abstand des Schwerpunktes **S** dieser Durchschnittsfläche vom Wasserspiegel **AB** sei **H**, und von **CD** gleich h, der Druck auf die Quadrateinheit der Oberfläche q, der Inhalt der Schnittfläche J. Diese Fläche hat nun von der einen Seite den Druck J.H.Π + J.q auszuhalten, und von der andern den Druck J.h.Π + J.q. Da nun für den Zustand des Gleichgewichts die Drücke auf beiden Seiten gleich sein müssen, so hat man die Gleichung:

$$J.H.\Pi + J.q = J.h.\Pi + J.q$$

und daraus folgt

$$H = h.$$

Bei communicirenden Röhren oder Gefäßen liegen also im Zustand des Gleichgewichtes die Wasserspiegel in einer Horizontalebene.

§. 287.

Befinden sich in communicirenden Röhren, Fig. 226, Flüssigkeiten von verschiedenem specifischen Gewichte, so liegen deren Oberflä-

chen nicht mehr in einerlei Horizontalebene. Das specifische Gewicht der Flüssigkeit in dem Theile BG sei α, und derjenigen in CK sei β. In der horizontalen Ebene EF grenzen beide Flüssigkeiten aneinander, und es sei H der Abstand dieser Berührungsebene von der Oberfläche CD, h der Abstand von AB, d der Abstand dieser Berührungsebene vom Schwerpunkt S des Querschnittes ab = J. Nun ist der Druck auf die eine Seite des Querschnittes gleich $J . (h + d) \alpha . \Pi + J . q$ und von der andern gleich $Jd\alpha\Pi + J . H\beta . \Pi + Jq$. Beide Seitendrücke müssen aber für's Gleichgewicht einander gleich sein, daher folgt

$$J (h + d) \alpha\Pi + Jq = Jd\alpha\Pi + JH\beta\Pi + Jq$$

und hieraus

$$h\alpha = H\beta$$

$$h : H = \beta : \alpha$$

d. h. die Höhen der Flüssigkeitsspiegel über der Berührungsfläche verhalten sich umgekehrt wie die specifischen Gewichte der Flüssigkeiten.

§. 288.

Röhrenstärke. Damit eine mit Wasser gefüllte Röhre nicht zersprengt werde, muß man derselben eine hinreichende Stärke geben. Eine solche Röhre kann nach ihrer Längenrichtung und in ihrem Querschnitte zerrissen werden. Um nun die Stärke des Querschnitts zu bestimmen, sei BC = r, Fig. 227, der innere Radius der Röhre, AB = δ die Dicke der Röhrenwand, w der Modul der absoluten Festigkeit, h die zum Querschnitt gehörige Druckhöhe, p der Druck auf die Flächeneinheit in der Axenrichtung der Röhre. Nun ist $(r + \delta)^2\pi - r^2\pi = 2r\pi\delta + \pi\delta^2 = 2r\pi\delta \left(1 + \frac{\delta}{2r}\right)$ der Querschnitt der Masse, daher $2r\pi\delta \left(1 + \frac{\delta}{2r}\right) w$ die absolute Festigkeit desselben. Der in der Axenrichtung wirkende Wasserdruck ist daselbst $r^2\pi p = r^2\pi h\Pi$. Die Festigkeit muß nun mit diesem Drucke im Gleichgewicht stehen, somit erhält man die Gleichung:

$$2r\pi\delta \left((1 + \frac{\delta}{2r}\right) w = r^2\pi h\Pi,$$

oder annähernd

$$2\delta w = rh\Pi.$$

hieraus folgt die Röhrenstärke

$$\delta = \frac{rh\Pi}{2w} \;. \; . \; . \; 1.$$

Damit aber die Röhre dem Drucke für die Dauer widerstehen könne, hat man $\frac{1}{3}$ w bis $\frac{1}{2}$ w für w zu setzen.

Zur Bestimmung der Röhrenstärke, damit kein Längenriß entstehe, betrachten wir eine Fläche von sehr kleiner Länge = l nach der Axenrichtung gemessen. Der Querschnitt der Trennungsfläche ist $l\delta$, ihre

absolute Festigkeit $l\delta w$, und für zwei gegenüberliegende gleiche Trennungsflächen ist somit die absolute Festigkeit oder die zum Zerreißen erforderliche Kraft $2l\delta w$. Der Wasserdruck ist aber für jede Röhrenhälfte $2rlp$, und dieser muß mit der vorigen Kraft im Gleichgewicht stehen, daher die Gleichung:

$$2l\delta w = 2rlp$$

also die verlangte Röhrenstärke

$$\delta = \frac{rp}{w} = \frac{rh\Pi}{w} \quad . \; . \; . \; 2.$$

Vergleicht man Gl. 1 mit 2, so ergibt sich, daß die Röhrenstärke in Bezug auf die Längenrisse doppelt so groß sein muß als in Rücksicht auf die Querrisse.

Für eine andere von gleichem Material haben δ', r', h' die gleiche Bedeutung, dann ist $\delta' = \frac{r'h'\Pi}{w}$, also verhält sich

$$\delta : \delta' = rh : r'h'.$$

Demnach verhalten sich die Dicken zweier Röhren von gleichem Material wie die Producte aus ihren Radien im Lichten in die Druckhöhen des Wassers. Bei gleichen Radien verhalten sie sich wie die Druckhöhen.

Es muß also die Röhrendicke bei einer senkrechten oder geneigten Röhre nach unten in dem Verhältnisse zunehmen wie die Druckhöhe. Horizontale Röhren erhalten überall gleiche Stärke.

Zur Bestimmung der Röhrenstärke werden auch folgende praktische Formeln angewendet. Bedeutet δ die Wanddicke, d den Durchmesser im Lichten, beide in Metern, n die Anzahl Atmosphären, welche dem Druck entspricht, so hat man, wenn auf Sicherheit gerechnet wird:

für Gußeisen	$\delta = 0{,}00238\ nd + 0{,}85$
„ Eisenblech	$\delta = 0{,}00086\ nd + 0{,}30$
„ Kupfer	$\delta = 0{,}00148\ nd + 0{,}40$
„ Blei	$\delta = 0{,}00242\ nd + 0{,}50$
„ Zink	$\delta = 0{,}00507\ nd + 0{,}40$
„ Holz	$\delta = 0{,}03230\ nd + 2{,}70$
„ natürliche Steine	$\delta = 0{,}03690\ nd + 3{,}00$
„ künstliche Steine	$\delta = 0{,}0538\ nd + 4{,}00$

Gewöhnlich werden die Wasserleitungs- und Gasröhren auf 10 Atmosphären probirt. Um für solche Fälle die gehörige Röhrenstärke zu erhalten, muß man $n = 10$ setzen.

Wenn ein Gefäß die Gestalt einer Hohlkugel hat und von innen einem Druck ausgesetzt ist, so wird es in der Richtung eines größten Kreises zu zerreißen streben. Es sei r der Radius der Kugel im Lichten, δ die Wandstärke, so ist die absolute Festigkeit des Querschnittes durch den Mittelpunkt gleich $[(r + \delta)^2\pi - r^2\pi]\, w = 2r\delta\pi \left(1 + \frac{\delta}{2r}\right) w$ oder annähernd $= 2r\delta\pi w$. Bezeichnet p den Normaldruck auf jede Flächeneinheit, dann ist der Druck auf die Projection der

Halbkugel oder auf den größten Kreis, welcher die Trennung zu bewirken sucht $= r^2\pi p$, demnach erhält man durch Gleichsetzung beider Kräfte

$$2r\delta\pi w = r^2\pi p$$

$$\delta = \frac{rp}{2w}.$$

Hieraus folgt, daß man einer Kugel nur die halbe Wandstärke zu geben hat wie einem Cylinder bei gleichem Radius und Druck auf die Flächeneinheit. Dieß gilt auch für Kugelsegmente, wodurch cylindrische Gefäße manchmal geschlossen werden.

Zweites Kapitel.

Vom Gleichgewicht des Wassers mit eingetauchten festen Körpern.

§. 289.

Auftrieb. Ein in Wasser getauchter fester Körper AB, Fig. 228, erleidet von allen Seiten einen Wasserdruck. Denken wir uns die Normaldrücke auf die Flächenelemente zerlegt je in eine verticale und zwei horizontale Seitenkräfte, so ist bekannt, daß der gesammte horizontale Druck gegen eine Fläche nach einer Richtung gleich ist dem Horizontaldrucke gegen ihre Verticalprojection auf diese Richtung. Nach der entgegengesetzten Seite erhält man aber auch dieselbe Verticalprojection, und es ist daher der Horizontaldruck auf diese Projection der gleiche wie vorhin. Da nun beide Drücke gleich und einander entgegengesetzt sind, so heben sie sich gegenseitig auf. Dieß findet statt bei je zwei parallelen Verticalprojectionen des Körpers auf jede horizontale Richtung.

Es heben sich also die Horizontalpressungen des Wassers auf den Körper nach allen Richtungen auf.

Um nun den verticalen Druck des Wassers auf den Körper zu bestimmen, denken wir uns denselben durch verticale Schnitte in lauter Elementarprismen, AB, Fig. 229, zerlegt. Die Querschnitte dieser Prismen seien i', i'', i''' . . ., ihre Längen AB der Reihe nach l', l'', l''' . . ., die Höhen der Elementar-Wassersäulen AC, welche sich über ihnen befinden h', h'', h'''. . . . Nun sind die Drücke, welche die Körperprismen von oben nach unten auf ihre Oberflächen A erleiden: $i'h'\Pi$, $i''h''\Pi$. . . . und die Drücke, welche sie vertical aufwärts erleiden, oder auf ihre Grundflächen B: $i'(h' + l')\Pi$, $i''(h'' + l'')\Pi$, . . . Sämmtliche Drücke bilden nun ein System paralleler Kräfte. Der resultirende Verticaldruck P auf den Körper muß daher gleich sein der algebraischen Summe dieser. Demnach ist

$$P = i'(h' + l')\Pi + i''(h'' + l'')\Pi + \ldots - i'h'\Pi - i''h''\Pi - \ldots$$

$$P = i'l'\Pi + i''l''\Pi + i'''l'''\Pi + \ldots$$

$$P = (i'l' + i''l'' + i'''l''' + \ldots)\Pi.$$

Die in den Klammern enthaltene Größe ist aber nichts anders als der Kubikinhalt oder das Volumen K des Körpers oder des vom Körper verdrängten Wassers. Daher ist

$$P = K\Pi.$$

Hieraus folgt: Jeder in Wasser eingetauchte Körper erleidet einen verticalen Druck von unten nach oben, welcher gleich ist dem Gewichte des vom Körper verdrängten Wassers.

Diesen Verticaldruck nennt man den Auftrieb.

Setzt man die Abstände der verticalen Elementarsäulen von einer verticalen Ebene x′, x″, x‴, . . . und den Abstand des Angriffspunktes des Auftriebs von derselben Ebene x, so hat man die Momentengleichung in Bezug auf dieselbe:

$$K\Pi x = i'l'\Pi . x' + i''l''\Pi x'' + \ldots$$

$$x = \frac{i'l'x' + i''l''x'' + \ldots}{K}$$

Hieraus folgt: Daß die Richtung des Auftriebs durch den Schwerpunkt der verdrängten Wassermasse geht.

An jedem in Wasser getauchten Körper wirken nun zwei einander entgegengesetzte Kräfte, nämlich der Auftrieb am Schwerpunkt der verdrängten Wassermasse aufwärts, und das Gewicht des Körpers am Schwerpunkt desselben abwärts. Mit der Differenz dieser Kräfte sinkt oder steigt er, je nachdem das Gewicht des Körpers größer oder kleiner ist als das Gewicht des von ihm verdrängten Wassers. Ist sein Gewicht kleiner, so steigt er so lange bis das Gewicht des von ihm verdrängten Wassers dem seinigen gleich kommt. Ist sein Gewicht gleich dem Auftrieb, so bleibt er in jeder Stelle des Wassers in Ruhe, und hat kein Bestreben zu sinken oder zu steigen.

Da der Auftrieb dem Gewichte des Körpers gerade entgegenwirkt, und dadurch dasselbe um die Größe des Auftriebs vermindert, so sagt man auch: Ein in Wasser getauchter Körper verliert so viel an seinem Gewichte, als das Gewicht des von ihm verdrängten Wassers beträgt.

Dieser von Archimedes erfundene Satz gilt nicht nur für tropfbare, sondern für alle Flüssigkeiten überhaupt, und dient zur Bestimmung der specifischen Gewichte der Körper.

§. 290.

Schwimmen. Wenn der eingetauchte Körper homogen ist, dann wird sein Schwerpunkt mit dem Schwerpunkt der verdrängten Wassermasse zusammenfallen. An demselben Punkte wirken dann die zwei einander entgegengesetzten Kräfte, und es wird der Körper in jeder Lage kein Bestreben zur Drehung zeigen. Ist aber der Körper nicht homogen, so fallen beide Schwerpunkte nicht zusammen, und es wird der Körper nur in einer Stellung im Gleichgewicht sein, nämlich wenn beide Schwerpunkte in eine verticale Linie fallen; in jeder andern Lage wird

eine Drehung erfolgen so lange, bis beide Punkte wieder in derselben Verticalen liegen.

Körper, die specifisch leichter sind als Wasser, werden nicht ganz eintauchen, sondern nur bis zu einer gewissen Tiefe, und ein Theil derselben ragt über das Wasser hervor; man sagt dann die Körper **schwimmen**. Auch specifisch schwerere Körper können, wenn sie geeignet geformt sind, auf dem Wasser schwimmen, z. B. eine metallene Hohlkugel, eine Schale von geringer Wandstärke. Die Tiefe, um welche ein schwimmender Körper in das Wasser eintaucht, heißt man die **Schwimmtiefe**. Die Linie, welche durch den Schwerpunkt des schwimmenden Körpers und den des verdrängten Wassers geht, heißt die **Schwimmaxe**, und der durch die horizontale Ebene des Wasserspiegels gebildete Schnitt des Körpers heißt die **Schwimmebene**.

Die Schwimmtiefe läßt sich bestimmen, wenn das specifische Gewicht und die Gestalt des Körpers bekannt sind.

§. 291.

Schwimmtiefe eines Parallelepipeds. Ein schwimmender parallelepipedischer Körper ABCD, Fig. 230, tauche bis zur Tiefe $AE = x$ in das Wasser ein. Es sei $AD = b$, $AB = h$, die auf die Ebene der Figur rechtwinkelige Dimension l, das specifische Gewicht β, Π habe die bisherige Bedeutung. Dann ist das Gewicht des Körpers $= bhl\beta\Pi$, und das Gewicht der verdrängten Wassermasse $bxl\Pi$. Da beide Gewichte einander gleich sein müssen, so folgt:

$$bxl\Pi = bhl\beta\Pi$$

und hieraus die Schwimmtiefe:

$$x = h\beta.$$

Ein vierkantiger Balken von Buchenholz, wobei $h = 1{,}8'$, $\beta = 0{,}63$ ist, wird also $x = 1{,}8 . 0{,}63 = 1{,}134$ Fuß tief einsinken.

§. 292.

Schwimmtiefe eines Kegels. Es sei ABC, Fig. 231, ein gerader Kegel, $AD = r$ der Radius seiner Grundfläche, $DC = h$ die Höhe, $GD = x$ die zu bestimmende Schwimmtiefe, β das specifische Gewicht seiner Masse. Es ist nun $\frac{r^2\pi h\beta\Pi}{3}$ das Gewicht des ganzen Kegels, $\frac{r^2\pi}{3}[h - (h - x)^3]\,\Pi$ das Gewicht des verdrängten Wassers. Da nun beide Gewichte einander gleich sein müssen, so erhält man die Gleichung

$$\frac{r^2\pi}{3}[h - (h - x)^3]\,\Pi = \frac{r^2\pi}{3}h\beta\Pi.$$

Wird diese Gleichung nach x geordnet, so folgt

$$x^3 - 3hx^2 + 3h^2x - h^3 + (1 - \beta)\,h = 0.$$

Die Auflösung dieser Gleichung gibt die Schwimmtiefe x.

§. 293.

Schwimmtiefe eines Schiffes. Die Bestimmung der Eintauchungstiefe ist namentlich bei Schiffen sehr wichtig. Sind die Schiffskörper zusammengesetzt aus bekannten geometrischen Formen, so läßt sich die Schwimmtiefe mittelst geometrischer Sätze genau bestimmen. Läßt sich aber der Schiffskörper nicht in Theile von bekannter und genau bestimmbarer Form zerlegen, so muß die Schwimmtiefe durch Versuche ermittelt werden.

Wir wollen annehmen, das Mittelstück des Schiffes, Fig. 232, sei ein Parallelepiped AF von rechteckigem Querschnitt, die beiden Schnäbel bilden vierseitige Pyramiden ADEHM und BCFGJ von rechteckiger Basis. Es sei AB = l die Länge des Mittelstücks; AD = BC = h die Höhe, AH = b die Breite desselben; ML = JK = d die Länge der Schnäbel oder die Höhe der Pyramide, P das Gewicht des Schiffes und Q das der Ladung. Die Schwimmebene bilde den horizontalen Schnitt a b g h c d e a. Die verdrängte Wassermasse läßt sich zerlegen in das Parallelepiped Ac, und in die beiden abgestumpften Prismen AaeHdf und BbgGch. Der Kubikinhalt Ac ist blx. Den Kubikinhalt eines abgestumpften Prismas findet man, wenn man die Summe der drei parallelen Kanten mit dem dritten Theile des normalen Querschnitts multiplicirt. Zwei der drei Kanten sind einander gleich, nämlich jede gleich b. Es ist also nur noch die dritte Kante ef oder gh zu bestimmen. Nun verhält sich, wenn lKi der normale Querschnitt ist:

$$ef : AH = Ml : Mi \text{ oder } Lk : Li = Ml : Mi$$

also

$$ef : AH = Lk : Li \text{ oder } ef : b = h - x : h$$

daher

$$ef = \frac{b\,(h - x)}{h}.$$

Ferner verhält sich $lk : x = d : h$, somit ist $lk = \frac{xd}{h}$, daher der Inhalt des Querschnitts $lki = \frac{lk \,.\, ki}{2} = \frac{x^2 d}{2h}$. Der Kubikinhalt eines Prismas ist demnach:

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2 d}{2h} \left[2b + \frac{b\,(h - x)}{h} \right] = \frac{1}{6} \cdot \frac{x^2 bd}{h^2} \,(3h - x)$$

also für beide gleich

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{x^2 bd}{h^2} \,(3h - x).$$

Das Gewicht des verdrängten Wasserkörpers ist folglich

$$blx\Pi + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2 bd}{h^2} \,(3h - x)\,\Pi.$$

Dieses muß nun gleich sein dem Gewichte des Schiffes sammt seiner Ladung. Man erhält somit die Gleichung:

$$blx\Pi + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2bd}{h^2}(3h - x)\,\Pi = P + Q.$$

oder $$x^3 - 3hx^2 - \frac{3h^2lx}{d} + \frac{3h^2}{bd\Pi} \cdot (P + Q) = 0.$$

§. 294.

Stabilität. Ein Körper schwimmt entweder in aufrechter oder schiefer Stellung. In aufrechter Stellung schwimmt er, wenn er wenigstens durch eine verticale Ebene, welche durch die Schwimmaxe gelegt wird, in zwei symmetrische Theile zerfällt; er schwimmt in schiefer Stellung, wenn dieß nicht der Fall ist.

Wenn ein schwimmender Körper aus seiner Gleichgewichtslage gebracht wird, so ist es möglich, daß er nach Beseitigung der drehenden Ursache entweder von selbst wieder in seine vorige Lage zurückkehrt, oder aber sich immer weiter von dieser entfernt. Im ersten Falle sagt man der Körper schwimme mit Stabilität oder im steten Gleichgewicht; im andern Falle mit Instabilität oder unstetem Gleichgewichte. Zeigt der aus seiner Lage gebrachte Körper weder das eine noch das andere Bestreben, so schwimmt er ohne Stabilität und befindet sich im Zustande der Gleichgültigkeit.

Um beurtheilen zu können, ob ein Körper mit Stabilität schwimme oder nicht, diene folgende Betrachtung. Es sei ABCD, Fig. 233, ein im Gleichgewicht schwimmender Körper, S sein Schwerpunkt, H der des verdrängten Wassers, EF die durch beide Punkte gehende verticale Schwimmaxe, GK die Schwimmebene. Man ertheile nun dem Körper eine Drehung, so daß er in die Stellung Fig. 234 komme. Hierdurch ist der Schwerpunkt H des verdrängten Wassers nach H′ gerückt worden. An dem Punkte S wirkt nun das Gewicht Q des Körpers vertical abwärts, und an H′ der Auftrieb P vertical aufwärts, welche Kräfte zusammen ein Paar bilden. Den Auftrieb kann man auch in dem Durchschnittspunkte M mit der Linie EF angreifend denken, und es ist klar, daß beide Kräfte die Symmetrieebene EF in ihre verticale Lage zu bringen streben, wodurch der Körper wieder in seine frühere Stellung kommt. Er schwimmt also in diesem Falle mit Stabilität. Wenn aber der Durchschnittspunkt M der durch H′ gehenden Verticalen mit der Axe EF unterhalb des Schwerpunktes S zu liegen kommt, wie in Fig. 235, so werden beide Kräfte zusammen den Körper noch weiter umdrehen, oder weiter von seiner ursprünglichen Lage entfernen, und der Körper wird umschlagen. Er schwimmt also mit Instabilität. Fällt aber der Punkt M mit S zusammen, so schwimmt er im Zustande der Gleichgültigkeit.

Man nennt nun den Punkt M, wo die durch den Schwerpunkt der verdrängten Wassermasse gehenden Verticalen die in der ursprünglichen Lage verticale Schwimmaxe EF schneiden, das Metacentrum

des schwimmenden Körpers. Wenn also das Metacentrum höher liegt als der Schwerpunkt des Körpers, so schwimmt der Körper mit Stabilität, liegt es tiefer, so schwimmt er nicht mit Stabilität, fällt es mit dem Schwerpunkt zusammen, so schwimmt er im Zustande der Gleichgültigkeit.

§. 295.

Maß der Stabilität. Fällt man vom Schwerpunkt S des Körpers, Fig. 234, das Perpendikel SL auf die Richtung des Auftriebs, so ist dieß der Hebelsarm des Paars (P, — P), da $P = Q$ ist. Das Moment P.CL dieses Paars nennt man das Maß der Stabilität. Bezeichnet α den Drehungswinkel des Körpers, und $MC = a$ die Entfernung des Metacentrums vom Schwerpunkt, sowie S die Stabilität, so hat man $CL = a \sin \alpha$, daher

$$S = P . a \sin \alpha \; . \; . \; . \; 1.$$

Hiernach ist also die Stabilität um so größer, je größer a ist, oder je weiter das Metacentrum von dem Schwerpunkt des Körpers entfernt ist.

Um nun diese Größe zu bestimmen, nehmen wir an, ein Schiff, Fig. 236, sei aus der Lage GK in die Lage G'K' durch eine Drehung gekommen, und der aus dem Wasser tretende Theil GG'N sei gleich dem eintauchenden KK'N. Bei aufrechter Stellung sei H der Schwerpunkt der verdrängten Wassermasse, welcher durch die Drehung nach H' rückt, m der Schwerpunkt des außer Wasser tretenden Theils, n der des eintauchenden, an m wirke das Gewicht q vertical abwärts, an n der Auftrieb q vertical aufwärts. Beide Kräfte einander gleich und entgegengesetzt, bilden ein Paar, dessen Hebelsarm $fl = b$ ist. Durch erstere Kraft wird der Auftrieb auf der einen Seite vermindert und durch die andere auf der andern Seite vermehrt. Der in H' angreifende Auftrieb P ersetzt nun den früher in H angreifenden und das Kräftepaar (q, — q). Bringt man daher in H' eine Gegenkraft — P an, so hält sie die in S angreifende Kraft P und das Kräftepaar (q, — q) im Gleichgewicht. Hieraus folgt aber, daß das Paar (P, — P) mit dem Paar (q, — q) im Gleichgewicht steht; es müssen daher die Momente beider Paare einander gleich sein. Es sei nun $G'FK' = V$ das Volumen des im Wasser befindlichen Schifftheils; $GG'N = KK'N = v$ das Volumen des auf der einen Seite aus dem Wasser getretenen und auf der andern untergetauchten Schifftheils, $fl = b$ der horizontale Abstand der Schwerpunkte m und n dieser Theile, $HR = c$ das Perpendikel von H auf H'M, oder der horizontale Abstand der beiden Schwerpunktspositionen H und H' des verdrängten Wassers. Da nun die Kräfte ein Gleichgewicht bedingen, so muß stattfinden

$$V . c = v . b.$$

$$c = \frac{v}{V} . b.$$

Ferner ist $HM = \frac{c}{\sin\alpha} = \frac{vb}{V \sin\alpha}$. Setzt man die Entfernung der Punkte H und S oder HS = d, so ist $a = SM = HM + HS = \frac{vb}{V \sin\alpha} + d$.

Substituirt man diesen Werth für a in die Gleichung 1, so erhält man:

$$S = P\left(\frac{vb}{V} + d \sin\alpha\right) \ldots 2.$$

Liegt der Schwerpunkt S des Schiffes zwischen H und M, so wird $a = \frac{vb}{V \sin\alpha} - b$, also

$$S = P\left(\frac{vb}{V} - d \sin\alpha\right) \ldots 3.$$

Hieraus folgt nun, daß die Stabilität um so größer wird, je breiter das Schiff und je größer die Entfernung des Metacentrums vom Schwerpunkt des Schiffes ist, oder je tiefer dieser liegt.

Auch ist wohl klar, daß der Werth der Gl. 3 weder Null noch negativ werden darf, wenn das Schiff wieder in seine vorige Stellung gelangen soll.

§. 296.

Zur Anwendung der allgemeinen Gleichungen des vorigen Paragraphen auf einen speciellen Fall nehmen wir an, der Querschnitt des Schiffes sei ein Rechteck, Fig. 237, GK die Schwimmebene in aufrechter Stellung, G′K′ diejenige nach dem das Schiff eine Drehung um die Größe des Winkels SML = α gemacht hat, S der Schwerpunkt des Schiffes, H und H′ die Schwerpunkte der verdrängten Wassermassen vor und nach der Drehung, GK = a die Breite des Schiffes, SH = d, Q das Gesammtgewicht des Schiffes oder des verdrängten Wassers, GFK = G′F′K′ = V das Volumen des verdrängten Wassers, GG′D = KK′D = v, mf und nl die Perpendikel aus den Schwerpunkten m, n auf die Schwimmebenen GK und G′K′, fl = b. Wird nun vorausgesetzt, die beiden Schwimmebenen halbiren sich im Durchschnittspunkte D, so erhält man $v = DKK' = \frac{DK.KK'}{2} = \frac{a^2 \tan\alpha}{8}$. Um nun b zu bestimmen, ziehe man durch die Schwerpunkte m, n die Linie cb, so ist $KK' = \frac{a \tan\alpha}{2}$, also $cK' = \frac{KK'}{2} = \frac{a \tan\alpha}{4}$. Somit $Dc = \frac{a\sqrt{4 + \tan^2\alpha}}{4}$. Nun verhält sich Dc:K′c = sin DK′c:sin K′Dc, also $\sin K'Dc = \frac{K'c.\sin DK'c}{Dc}$, und wenn man substituirt, so wird sin K′Dc =

$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{4+\tang^2\alpha}}$. Durch geeignete Substitution und Reduction ergibt sich: $\cos^2(K'Dc) = \frac{2+\sec^2\alpha+\cos^2\alpha}{4+\tang^2\alpha}$; da aber $2\sec\alpha\cos\alpha = 2$ ist, so folgt $\cos^2(K'Dc) = \frac{(\sec\alpha+\cos\alpha)^2}{4+\tang^2\alpha}$, oder $\cos K'Dc = \frac{\sec\alpha+\cos\alpha}{\sqrt{4+\tang^2\alpha}}$. Es ist aber $Dc = Dn \cos K'Dc = \frac{2}{3}Dc.\cos K'Dc$, folglich $Dc = \frac{a}{6}(\sec\alpha+\cos\alpha)$, also $b = 2Dc = \frac{a}{3}(\sec\alpha+\cos\alpha)$. Substituirt man die betreffenden Werthe in Gl. 2, so folgt die Stabilität:

$$S = Q\left[\frac{a^3 \tang\alpha}{24V}(\sec\alpha+\cos\alpha)+d\sin\alpha\right].$$

§. 297.

Specifisches Gewicht. Die Bestimmung des specifischen Gewichtes der Körper beruht auf dem Gesetze vom Auftrieb. Man bedient sich hierzu der hydrostatischen Wage, einer sehr empfindlichen gleicharmigen Wage, die so eingerichtet ist, daß damit Körper unter Wasser abgewogen werden können. Die eine Schale hängt an kürzern Schnüren als die andere und hat unten einen feinen Draht oder Faden, woran die zu bestimmenden Körper befestigt werden. Man wiegt den Körper zuerst in der Luft ab, alsdann in reinem Wasser, das etwa 12° R. besitzt. Sein absolutes Gewicht in freier Luft sei Q, sein Gewicht im Wasser q, also ist sein Gewichtsverlust p oder das Gewicht eines gleich großen Volumens Wasser $p = Q - q$. Nennt man β das specifische Gewicht des Körpers, so ist $\beta p = q$, also

$$\beta = \frac{Q}{p} = \frac{Q}{Q-q},$$

d. h. das specifische Gewicht oder die Dichtigkeit eines Körpers ist gleich dem absoluten Gewichte dividirt durch den Auftrieb oder dividirt durch das Gewicht eines gleichen Volumens Wasser.

Wenn der feste Körper specifisch leichter ist als Wasser, so verbindet man ihn mechanisch mit einem andern specifisch schwereren Körper so, daß die vereinigten Körper untersinken. Das absolute Gewicht des schwerern Körpers in freier Luft sei Q, im Wasser q, der leichtere Körper wiege in freier Luft P und beide Körper wiegen im Wasser G. Nun ist der Auftrieb für den ersten Körper $Q - q$ und für beide zusammen $Q + P - G$, folglich für den leichtern Körper allein $(Q + P - G) - (Q - q) = P + q - G$, also

$$\beta = \frac{P}{P+q-G}.$$

Um das specifische Gewicht kleiner, fester, körniger Körper, oder auch von Flüssigkeiten, zu bestimmen, bedient man sich oft einer Flasche

mit einem genau eingeschliffenen Stöpsel. Mittelst einer genauen Wage bestimmt man nun das Gewicht P der festen Körper, alsdann wiegt man sie mit der mit Wasser gefüllten Flasche ab und findet das das Gewicht Q für beide. Nun bringe man die festen Körper in die Flasche, schließe dieselbe wieder genau gefüllt und wiege sie jetzt ab. Die in die Flasche gebrachten Körper haben aber einen Theil des Wassers verdrängt, daher wird die Flasche um dieses Gewicht weniger wiegen als das vereinte Gewicht Q der Flasche und der Körper. Man wird daher der Flasche noch eine Zulage p geben müssen, damit das Gleichgewicht mit Q hergestellt wird. Es ist daher p das Gewicht des von den Körpern verdrängten Wassers, daher erhält man das gesuchte specifische Gewicht

$$\beta = \frac{P}{p}.$$

Will man das specifische Gewicht einer Flüssigkeit bestimmen, so wiege man zuerst die leere Flasche, sodann mit Wasser gefüllt und zuletzt mit der betreffenden Flüssigkeit gefüllt ab. Die gefundenen Gewichte seien beziehungsweise q, Q, P, dann erhält man das specifische Gewicht der Flüssigkeit:

$$\beta = \frac{P - q}{Q - q}.$$

§. 298.

Aräometer. Die Aräometer oder Senkwagen, Fig. 238, 239, 240, werden zur Bestimmung des specifischen Gewichts von Flüssigkeiten angewendet. Es sind diese Instrumente hohle, in Beziehung auf ihre Axe symmetrische Körper, mit tief liegendem Schwerpunkte, welche in aufrechter Stellung in der Flüssigkeit schwimmen und durch ihr mehr oder weniger tiefes Einsinken das specifische Gewicht derselben angeben. Sie sind gewöhnlich aus Glas oder Messingblech verfertigt. Manche sind auch so eingerichtet, daß sie das absolute Gewicht eines bestimmten Volumens Flüssigkeit angeben. Andere haben eine solche Einrichtung, daß sie bei gemischten Flüssigkeiten den Gehalt eines Bestandtheils anzeigen. So gibt es Bierwagen, Weinwagen, Branntweinwagen oder Alkoholometer, Soolwagen u. s. w.

In Bezug auf ihre Einrichtung gibt es zwei Arten:

1. Scalenaräometer, welche, indem sie bei verschiedenen Flüssigkeiten verschieden tief einsinken, durch eine Scale das specifische Gewicht anzeigen.

2. Gewichtsaräometer, welche durch aufgelegte Gewichte in jeder Flüssigkeit bis zu einem gewissen Punkt, dem Normalpunkt, einsinken. Aus den aufgelegten Gewichten wird dann das specifische Gewicht berechnet.

Ein Scalenaräometer, Fig. 238, besteht aus einem hohlen Körper A, der unten eine kleine mit Quecksilber gefüllte Kugel B trägt

und nach oben in eine Röhre CD, an der die Scale angebracht ist, ausläuft. Durch das Quecksilber in B wird der Schwerpunkt sehr tief herabgebracht und das Instrument schwimmt in aufrechter Stellung.

Senkwagen mit Gewichten, Fig. 239, tragen oben bei C eine Schale, auf welche die Gewichte gelegt werden. Soll das Instrument zur Bestimmung der specifischen Gewichte fester Körper benutzt werden, dann trägt es unten noch eine Schale B, in welche die betreffenden Körper eingelegt werden. Da aber Senkwagen mit Gewichten gern umschlagen, so hat man verschiedene Vorrichtungen getroffen, um dieß zu verhüten, z. B. die von Tralles, Fig. 240. Der hohle Körper A ist im Wasser, die Röhre BC steht in Verbindung mit dem Bügel CDEF, an welchem die Wagschale hängt.

§. 299.

Es sei Q das Gewicht eines Scalenaräometers, Fig 238, i der Querschnitt der Röhre DC, Π das Gewicht einer Kubikeinheit Wasser. In reinem Wasser sinke das Instrument bis F ein, also ist der Kubikinhalt des eingetauchten Theiles desselben $= \frac{Q}{\Pi}$, durch ein angebrachtes Gewicht q sinke es bis C ein; daher ist der Kubikinhalt des jetzt eingetauchten Theiles $= \frac{Q + q}{\Pi}$, also der Kubikinhalt des Röhrentheils FC $= \frac{q}{\Pi}$. Ist nun FC = l, so folgt $il = \frac{q}{\Pi}$, mithin $i = \frac{q}{l\Pi}$. Setzt man das Instrument in eine Flüssigkeit vom specifischen Gewichte β, in welcher es bis G eintaucht, so ist der Kubikinhalt des Röhrentheiles FG, wenn seine Länge y gesetzt wird $= iy = \frac{qy}{l\Pi}$, demnach der Inhalt des ganzen eingetauchten Theiles $= \frac{Q}{\Pi} + \frac{qy}{l\Pi}$, also das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit $= \left(Q + \frac{qy}{l}\right)\beta$. Dieses muß nun gleich sein dem Gewichte Q des Aräometers, somit erhält man die Gleichung:

$$\beta\,(Ql + qy) = Ql \;.\;.\;.\; 1.$$

Wenn nun die Flüssigkeit specifisch leichter ist als Wasser, dann wird y positiv, ist sie specifisch schwerer, so wird y negativ und wird abwärts aufgetragen.

Man nimmt gewöhnlich für Flüssigkeiten, die schwerer sind als Wasser, ein besonderes Instrument, welches dann bis zum obersten Punkt der Scale im Wasser einsinkt, und ein besonderes für specifisch leichtere Flüssigkeiten, das im Wasser bis zum untersten Punkte der Scale einsinkt.

Aus obiger Gleichung folgt:

$$y = \frac{Ql}{q}\left(\frac{1}{\beta} - 1\right) \ldots 2.$$

Ist der Querschnitt der Röhre bekannt, so hat man:

$$y = \frac{Q}{i\Pi}\left(\frac{1}{\beta} - 1\right) \ldots 3.$$

Hiernach lassen sich nun die Scalen eintheilen.

Soll die Scale gleiche Grade der Aenderung des specifischen Gewichts angeben, so sei die Abnahme für jeden Grad des tiefern Sinkens $= \frac{1}{m}$. In Wasser sinke es bis D ein, dann ist das specifische Gewicht = 1, für einen Grad weiter 0,99, ferner 0,98; 0,97 u. s. w. Dann wäre $\frac{1}{m} = \frac{1}{100}$, also m = 100. Ist für die Tiefe des Einsinkens = y die Abnahme des specifischen Gewichts das nfache, so wird $\beta = 1 - \frac{n}{m} = \frac{m - n}{m}$, also

$$y = \frac{Ql}{q} \cdot \frac{n}{m - n} \ldots 4.$$

Setzt man für n die Zahlen 1, 2, 3 . . ., so erhält man die Werthe von y, welche man nur auf die Scale abtragen darf, um so die Eintheilung zu bewerkstelligen.

Hat man die Scale einzutheilen für ein Instrument für specifisch schwerere Flüssigkeiten als Wasser, wobei also y abwärts getragen wird, so hat man nur — y und — n für y und n in die Formel zu setzen, und man erhält für diesen Fall

$$y = \frac{Ql}{q} \cdot \frac{n}{m + n} \ldots 5.$$

Es ergibt sich auch, daß für gleiche Aenderung des specifischen Gewichts die Abtheilungen nicht gleich sind, weil der Werth von y dem von n nicht proportional ist.

§. 300.

Bei Bestimmung des specifischen Gewichts von Flüssigkeiten mittelst eines Gewichtsaräometers, Fig. 239, verfährt man auf folgende Weise: Das absolute Gewicht des Instrumentes sei P, im Wasser sinke es bis zur Marke D ein, wenn das Gewicht Q auf das Schälchen gelegt wird; in der zu untersuchenden Flüssigkeit vom specifischen Gewichte β sinke es bei dem Auflagegewicht q bis zur Marke ein. Man erhält dann:

$$\beta = \frac{P + q}{P + Q}.$$

Soll das specifische Gewicht eines festen Körpers mittelst des Gewichtsaräometers bestimmt werden, so gebraucht man das von

Nicholson, Fig. 239 a, welches unten ein Körbchen trägt. Man verfährt hierbei auf folgende Weise. Das Instrument werde in Wasser getaucht und ein Gewicht Q aufgelegt, damit es bis zur Marke D einsinke. Sodann nimmt man Q weg, legt den festen Körper einmal auf die Schale C, ein andermal in das Körbchen B und bemerkt in beiden Fällen die auf die Schale C zu legenden Gewichte q und q′, welche erforderlich sind, damit das Instrument bis zu D einsinke. Es ist nun offenbar das Gewicht des Körpers in der Luft Q — q und im Wasser Q — q′, folglich der Auftrieb: (Q — q) — (Q — q′) = q′ — q, somit ist

$$\beta = \frac{Q - q}{q' - q}.$$

Vierter Abschnitt.

Hydraulik.

Erstes Kapitel.

Vom Ausfluß des Wassers aus Gefäßen.

Ausfluß bei constanter Druckhöhe.

§. 301.

Erklärung. Die Oeffnung, aus welcher das Wasser fließt, nennt man die Ausflußöffnung. Befindet sich dieselbe im horizontalen Boden des Gefäßes, so heißt sie eine horizontale Oeffnung, Fig. 240. Ihre senkrechte Entfernung CD vom Wasserspiegel AB heißt die Druckhöhe. Befindet sich die Oeffnung in der Seitenwand des Gefäßes, so heißt sie eine Seitenöffnung, Fig. 241 a. Der Abstand des Schwerpunktes der Oeffnung vom Wasserspiegel ist hier die Druckhöhe.

Die Oeffnung kann in einer dünnen Wand angebracht sein, d. h. in einer solchen, bei welcher die Dicke nicht größer ist als die Hälfte der kleinsten Dimension der Oeffnung, oder sie ist versehen mit einer cylindrischen, conisch convergirenden oder divergirenden Ansatzröhre.

Unter Wassermenge versteht man das Volumen Wasser, welches in der Zeiteinheit aus der Oeffnung fließt. Bei Bestimmung der Wassermenge hat man zu berücksichtigen, ob die Druckhöhe constant bleibe oder sich verändere. Wir betrachten zunächst den Ausfluß bei constanter Druckhöhe.

§. 302.

Wassermenge. Nimmt man an, die Wasserelemente treten alle parallel zu einander und mit gleicher Geschwindigkeit aus der Oeffnung, so ist das in der Zeiteinheit austretende Wasservolumen offenbar gleich einem Prisma, das zur Länge die Geschwindigkeit des austretenden Wassers und zur Grundfläche den Querschnitt der Oeffnung hat.

Es sei M die Wassermenge, a der Querschnitt der Oeffnung, v die Geschwindigkeit des Wassers in der Oeffnung, so ist

$$\left.\begin{aligned} M &= av \\ v &= \frac{M}{a} \\ a &= \frac{M}{v} \end{aligned}\right\} \ldots 1.$$

Das in der Zeit t austretende Wasserquantum ist

$$Mt = M' = avt \ldots 2.$$

Ist γ das Gewicht einer Kubikeinheit Wasser, Q das Gewicht der austretenden Wassermenge, so hat man:

$$Q = M\gamma = av\gamma \ldots 3.$$

§. 303.

Ausflußgeschwindigkeit. Es sei ABCDFE ein mit Wasser gefülltes Gefäß. Bringt man in dem horizontalen Theile DC eine Oeffnung G an, so wird man bemerken, daß der aus dieser Oeffnung senkrecht aufsteigende Wasserstrahl nahezu die Höhe des Wasserspiegels EFH erreicht. Er würde dieselbe wohl ganz erreichen, wenn der Widerstand der Luft, die Reibung der Wasserelemente an den Gefäßwänden und andere Hindernisse beseitigt wären. Der Abstand der Oeffnung G vom Wasserspiegel sei H. Soll aber ein senkrecht in die Höhe steigender Körper die Höhe M erreichen, so ist dazu eine Anfangsgeschwindigkeit $= \sqrt{2gH}$ erforderlich. Es folgt hieraus, daß die Geschwindigkeit v, mit welcher das Wasser aus dieser Oeffnung tritt, dieser Geschwindigkeit gleich sein muß, daher muß sein

$$v = \sqrt{2gH}.$$

Die Ausflußgeschwindigkeit ist also dieselbe, welche ein freifallender Körper erreicht haben würde, wenn er von der Höhe des Wasserspiegels zur Mündung oder von der Druckhöhe H herabgefallen wäre. Dieß ist der sogenannte Toricellische Lehrsatz.

Wir wollen diesen Satz noch auf andere Weise herleiten. Es sei CD, Fig. 240, die constante Druckhöhe H, das Gewicht der ausfließenden Wassermenge $= M\gamma$. Wenn nun dieses Gewicht von der Höhe H herabsinkt, so wird dadurch eine Arbeit $= M\gamma H$ verrichtet. Um nun diesem Gewichte die Ausflußgeschwindigkeit v zu ertheilen, ist eine Arbeit $= \frac{M\gamma v^2}{2g}$ erforderlich. Finden durchaus keine Hindernisse statt, so müssen beide Arbeiten einander gleich sein, daher hat man

$$\frac{M\gamma v^2}{2g} = M\gamma H$$

und daraus

$$v = \sqrt{2gH}\,;\; H = \frac{v^2}{2g}.$$

Für die Druckhöhe H′ sei v′ die Geschwindigkeit, also ist

$$v' = \sqrt{2gH'}.$$

Nun verhält sich

$$v : v' = \sqrt{2gH} : \sqrt{2gH'}$$
$$v : v' = \sqrt{H} : \sqrt{H'}$$
$$H : H' = v^2 : v'^2.$$

Es verhalten sich also die Ausflußgeschwindigkeiten wie die Quadratwurzeln aus den Druckhöhen, und die Druckhöhen wie die Quadrate der Ausflußgeschwindigkeiten.

Setzt man den Werth von v in die Formeln des vorigen §, so erhält man:

$$M = a\sqrt{2gH};\quad a = \frac{M}{\sqrt{2gH}};\quad H = \frac{M^2}{2ga^2}.$$

Aufg. Welches ist die Wassermenge aus einer Oeffnung von 1,20 Mtr. Weite und 0,15 Mtr. Höhe bei einer Druckhöhe von 1,30 Mtr.?

Aufl. Hier ist $a = 1{,}20 . 0{,}15 = 0{,}180$; $H = 1{,}30$; $g = 9{,}808$, also

$$M = 0{,}180\sqrt{2 . 9{,}808 . 1{,}30} = 0{,}909 \text{ Kubikmeter.}$$

§. 304.

Wirkt außer der Schwere noch ein Druck auf die Oberfläche des Wassers, Fig. 243, welcher die Geschwindigkeit v' erzeugt und dem die Wasserhöhe h entspricht, so ist $h = \frac{v'^2}{2g}$. Diese Druckhöhe muß in diesem Falle noch zu H addirt werden und man erhält

$$v = \sqrt{2g\,(H + h)};\quad M = a\sqrt{2g\,(H + h)}.$$

Ist AB = A der Querschnitt der Oberfläche, P der Druck auf dieselbe, so ist $P = Ah\gamma$, also $h = \frac{P}{A\gamma}$, daher

$$v = \sqrt{2g\left(H + \frac{P}{A\gamma}\right)};\quad M = a\sqrt{2g\left(H + \frac{P}{A\gamma}\right)}.$$

Bedeutet p den Druck auf die Flächeneinheit, so ist $p = \frac{P}{A}$, somit

$$v = \sqrt{2g\left(H + \frac{p}{\gamma}\right)};\quad M = a\sqrt{2g\left(H + \frac{p}{\gamma}\right)}.$$

Bezeichnet ferner q den Wasserdruck auf die Flächeneinheit in der Oeffnung, so ist $q = \left(H + \frac{p}{\gamma}\right)\gamma$ oder $\frac{q}{\gamma} = H + \frac{p}{\gamma}$, demnach wird

$$v = \sqrt{2g\frac{q}{\gamma}};\quad M = a\sqrt{2g\frac{q}{\gamma}}.$$

Für einen andern Druck q' auf die Flächeneinheit sei v' die Geschwindigkeit, dann hat man

$$v : v' = \sqrt{2g\frac{q}{\gamma}} : \sqrt{2g\frac{q'}{\gamma}}.$$
$$v : v' = \sqrt{q} : \sqrt{q'}.$$

d. h. die Ausflußgeschwindigkeiten verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Pressungen auf die Flächeneinheit.

Sind die Drücke auf die Flächeneinheit der Oeffnung gleich, aber γ und γ' die Gewichte einer Kubikeinheit zweier Flüssigkeiten oder ihre Dichte verschieden, so hat man:

$$v : v' = \sqrt{2g\frac{q}{\gamma}} : \sqrt{2g\frac{q}{\gamma'}}$$
$$v : v' = \sqrt{\gamma'} : \sqrt{\gamma}.$$

d. h. die Ausflußgeschwindigkeiten zweier Flüssigkeiten verhalten sich bei gleichem Drucke auf die Quadrateinheit umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus den Dichtigkeiten.

Findet auch ein Druck gegen die Oeffnung statt, dem die Druckhöhe h' entspricht, so ist

$$v = \sqrt{2g\,(H + h - h')}.$$

Wenn p' den Druck auf die Quadrateinheit gegen die Oeffnung bedeutet, so folgt

$$v = \sqrt{2g\left(H + \frac{p - p'}{\gamma}\right)}.$$

Ist der Luftdruck auf die Oberfläche und auf die Ausflußöffnung nicht sehr verschieden, so kann man ihn vernachlässigen, im andern Falle muß er berücksichtigt werden.

Strömt das Wasser aus einer Oeffnung nicht unmittelbar in die freie Luft aus, sondern ist die Oeffnung vom Wasser überfluthet, so heißt man sie eine untergetauchte Oeffnung. Ist ab, Fig. 244, die Oeffnung in dem Gefäße ABF und AB der Wasserspiegel daselbst, DE derjenige außerhalb der Oeffnung, so hat man hier die Differenz der Abstände beider Wasserspiegel vom Schwerpunkt C der Oeffnung als Druckhöhe zu nehmen. Ist CB' = H, CD' = h, so erhält man

$$v = \sqrt{2g\,(H - h)};\ M = a\sqrt{2g\,(H - h)}.$$

§. 305.

Theoretische und wirkliche Ausflußgeschwindigkeit und Wassermenge. Die bisher abgeleitete Geschwindigkeit $\sqrt{2gH}$ heißt die theoretische oder hypothetische Geschwindigkeit, sowie die Wassermenge a $\sqrt{2gH}$ die theoretische oder hypothetische Wassermenge. Die wirkliche Ausflußgeschwindigkeit und Wassermenge ist immer kleiner, als die, welche nach jenen Formeln bestimmt wird. Dieser Verminderung liegen verschiedene Ursachen zu Grunde. Durch die Reibung des Wassers an den Gefäßwänden und die Anziehung

derselben gegen das Wasser, sowie durch Klebrigkeit der Flüssigkeit, wird immer eine Verminderung der Geschwindigkeit herbeigeführt. Ferner ziehen sich die Wassertheile gegen die Mündung immer etwas zusammen, so daß der Querschnitt des zusammengezogenen Strahls kleiner wird als der Querschnitt der Oeffnung. Sodann wirkt die Luft dem Austritt entgegen. Alle diese Umstände, sie mögen bei einem ausfließenden Strahle zusammen oder theilweise vorkommen, bewirken die gedachte Verminderung. Um daher die wirkliche Ausflußgeschwindigkeit und Wassermenge zu erhalten, muß man die theoretische noch mit einem Erfahrungscoefficienten φ, den man den Contractions- oder Reductionscoefficienten nennt, multipliciren. Man hat sonach die wirkliche Geschwindigkeit

$$v = \varphi \sqrt{2gH} \; . \; . \; . \; 1$$

und die wirkliche oder wahre Wassermenge

$$M = \varphi a \sqrt{2gH} \; . \; . \; . \; 2.$$

Das in t Zeiteinheiten ausfließende Wasserquantum erhält man durch

$$M = \varphi a t \sqrt{2gH} \; . \; . \; . \; 3.$$

§. 306.

Coefficienten bei vollständiger Contraction. Bei dünnen Wänden zieht sich der Strahl in der Mündung am bedeutendsten zusammen, so daß der Querschnitt desselben wesentlich abweicht von dem der Oeffnung. Nach den neuesten Versuchen ist der Querschnitt etwa in der halben Mündungsweite am kleinsten, und seine Dicke ist 0,8 des Durchmessers der Oeffnung. Wenn also a′ der Querschnitt des Strahles ist, so hat man $a' = (0{,}8)^2\, a = 0{,}64\, a$.

Im Allgemeinen erhält man für Oeffnungen in dünnen Wänden die Wassermenge genau genug, wenn man $\varphi = 0{,}62$ setzt. Genauere Resultate erhält man durch Benützung der folgenden Tafeln. Für Oeffnungen in Schleußenthoren nimmt man gewöhnlich $\varphi = 0{,}625$. Diese Coefficienten gelten auch für untergetauchte Oeffnungen.

Bei cylindrischen Ansatzröhren fällt die Wassermenge größer aus, als bei dünnen Wänden. Ist die Ansatzröhre 2 bis 3mal so lang als der Durchmesser der Oeffnung, so kann man im Mittel annehmen $\varphi = 0{,}82$.

Wenn die Wanddicke, in welcher eine Oeffnung sich befindet, 2 bis 3mal dem Durchmesser der Oeffnung gleich ist, so muß eine solche Oeffnung wie eine cylindrische Ansatzröhre angesehen werden, und es ist gleichfalls $\varphi = 0{,}82$ zu setzen.

Bei conisch convergirenden Ansatzröhren, d. i. solchen, die sich nach Außen verengen, ändert sich die Wassermenge mit dem Convergenzwinkel. Für einen Winkel von 0^0 wird die Röhre cylindrisch. Die Wassermenge wächst mit dem Winkel, bis letzterer 12^0 bis 13^0 erreicht hat, wofür dann $\varphi = 0{,}95$ gefunden wurde. Bei weiterer Zunahme des Winkels hat sich eine Verminderung gezeigt, und für

20° ist $\varphi = 0{,}94$. Diese Abnahme spricht sich von da an bei weiterer Vergrößerung des Winkels schärfer aus, und es nähert sich der Coefficient bald dem für eine dünne Wand.

Die größte Wassermenge erhält man, wenn die conische Ansatzröhre im Innern die Form des zusammengezogenen Strahls von der Oeffnung in einer dünnen Wand hat. Die theoretische Wassermenge wird dadurch beinahe erreicht.

Für größere pyramidale Lutten, welche das Wasser auf die Wasserräder leiten, ist $\varphi = 0{,}97$.

Unter allen Ansatzröhren geben die conisch divergirenden die größte Wassermenge. Diese kann sogar die theoretische übersteigen. Bei Versuchen ist der Werth $\varphi = 1{,}46$ schon erreicht worden.

Folgende Tabellen enthalten die Contractionscoefficienten für verschiedene Wasserstände über der Oeffnung bei verschiedenen Höhen der Oeffnung. Die erste Tabelle gilt für den Fall, wo die Wasserstände an einem ruhigen Orte, und die zweite für den Fall, wo sie unmittelbar an der Oeffnung gemessen werden.

I.

Tafel der Coefficienten der theoretischen Ausflußmenge für rechtwinkelige, verticale Oeffnungen in dünnen Wänden bei vollständiger Contraction und Ausfluß des Wassers in die freie Luft.

(Die Wasserstände sind bei einem Punkte im Reservoir gemessen, wo das Wasser vollkommen ruhig ist.)

Wasserstände über dem obern Rand der Oeffnung.	Coefficienten der theoretischen Ausflußmenge für Höhen der Oeffnung von					
	0,20 M.	0,10 M.	0,05 M.	0,03 M.	0,02 M.	0,01 M.
0,000 M.	″	″	″	″	″	″
0,005	″	″	″	″	″	0,705
0,010	″	″	0,607	0,630	0,660	0,701
0,015	″	0,593	0,612	0,632	0,660	0,697
0,020	0,572	0,596	0,615	0,634	0,659	0,694
0,030	0,578	0,600	0,620	0,638	0,659	0,688
0,040	0,582	0,603	0,623	0,640	0,658	0,683
0,050	0,585	0,605	0,625	0,640	0,658	0,679
0,060	0,587	0,607	0,627	0,640	0,657	0,676
0,070	0,588	0,609	0,628	0,639	0,656	0,673
0,080	0,589	0,610	0,629	0,638	0,656	0,670
0,090	0,591	0,610	0,629	0,637	0,655	0,668
0,100	0,592	0,611	0,630	0,637	0,654	0,666
0,120	0,593	0,612	0,630	0,636	0,653	0,663
0,140	0,595	0,613	0,630	0,635	0,651	0,660
0,160	0,596	0,614	0,631	0,634	0,650	0,658
0,180	0,597	0,615	0,630	0,634	0,649	0,657
0,200	0,598	0,615	0,630	0,633	0,648	0,655
0,250	0,599	0,616	0,630	0,632	0,646	0,653
0,300	0,600	0,616	0,629	0,632	0,644	0,650
0,400	0,602	0,617	0,628	0,631	0,642	0,647
0,500	0,603	0,617	0,628	0,630	0,640	0,644
0,600	0,604	0,617	0,627	0,630	0,638	0,642
0,700	0,604	0,616	0,627	0,629	0,637	0,640
0,800	0,605	0,616	0,627	0,629	0,636	0,637
0,900	0,605	0,615	0,626	0,628	0,634	0,635
1,000	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632
1,100	0,604	0,614	0,625	0,627	0,631	0,629
1,200	0,604	0,614	0,624	0,626	0,628	0,626
1,300	0,603	0,613	0,622	0,624	0,625	0,622
1,400	0,603	0,612	0,621	0,622	0,622	0,618
1,500	0,602	0,611	0,620	0,620	0,619	0,615
1,600	0,602	0,611	0,618	0,618	0,617	0,613
1,700	0,602	0,610	0,617	0,616	0,615	0,612
1,800	0,601	0,609	0,615	0,615	0,614	0,612
1,900	0,601	0,608	0,614	0,613	0,612	0,611
2,000	0,601	0,607	0,613	0,612	0,612	0,611
3,000	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,609

II.

Tafel der Coefficienten der theoretischen Ausflußmenge für rechtwinkelige, verticale Oeffnungen in einer dünnen Wand bei vollständiger Contraction und Ausfluß in die freie Luft.

(Die Wasserstände sind unmittelbar an der Schütze gemessen.)

Wasserstände über dem obern Rand der Oeffnung.	Coefficienten der theoretischen Ausflußmenge für Höhen der Oeffnung von					
	0,20 M.	0,10 M.	0,05 M.	0,03 M.	0,02 M.	0,01 M.
0,000 M.	0,619	0,667	0,713	0,766	0,783	0,795
0,005	0,597	0,630	0,668	0,725	0,750	0,778
0,010	0,595	0,618	0,642	0,687	0,720	0,762
0,015	0,594	0,615	0,639	0,674	0,707	0,745
0,020	0,594	0,614	0,638	0,668	0,697	0,729
0,030	0,593	0,613	0,637	0,659	0,685	0,708
0,040	0,593	0,612	0,636	0,654	0,678	0,695
0,050	0,593	0,612	0,636	0,651	0,672	0,686
0,060	0,594	0,613	0,635	0,647	0,668	0,681
0,070	0,594	0,613	0,635	0,645	0,665	0,677
0,080	0,594	0,613	0,635	0,643	0,662	0,675
0,090	0,595	0,614	0,634	0,641	0,659	0,672
0,100	0,595	0,614	0,634	0,640	0,657	0,669
0,120	0,596	0,614	0,633	0,637	0,655	0,665
0,140	0,597	0,614	0,632	0,636	0,653	0,661
0,160	0,597	0,615	0,631	0,635	0,651	0,659
0,180	0,598	0,615	0,631	0,634	0,650	0,657
0,200	0,599	0,615	0,630	0,633	0,649	0,656
0,250	0,600	0,616	0,630	0,632	0,646	0,653
0,300	0,601	0,616	0,629	0,632	0,644	0,651
0,400	0,602	0,617	0,629	0,631	0,642	0,647
0,500	0,603	0,617	0,628	0,630	0,640	0,645
0,600	0,604	0,617	0,627	0,630	0,638	0,643
0,700	0,604	0,616	0,627	0,629	0,637	0,640
0,800	0,605	0,616	0,627	0,629	0,636	0,637
0,900	0,605	0,615	0,626	0,628	0,634	0,635
1,000	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632
1,100	0,604	0,614	0,625	0,627	0,631	0,629
1,200	0,604	0,614	0,624	0,626	0,628	0,626
1,300	0,603	0,613	0,622	0,624	0,625	0,622
1,400	0,603	0,612	0,621	0,622	0,622	0,618
1,500	0,602	0,611	0,620	0,620	0,619	0,615
1,600	0,602	0,611	0,618	0,618	0,617	0,613
1,700	0,602	0,610	0,617	0,616	0,615	0,612
1,800	0,601	0,609	0,615	0,615	0,614	0,612
1,900	0,601	0,608	0,614	0,613	0,613	0,611
2,000	0,601	0,607	0,614	0,612	0,612	0,611
3,000	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,609

Wenn die gegebene Höhe des Wasserstandes oder der Oeffnung zwischen zwei in der Tabelle enthaltenen fällt, so nimmt man für den Coefficienten ein proportionales Mittel.

Aufg. 1. In dem horizontalen Boden eines Gefäßes befindet sich eine kreisförmige Oeffnung einer dünnen Wand. Der Durchmesser derselben ist 0,05 Mtr., und die Druckhöhe 1,6 Mtr. Man soll die Wassermenge bestimmen?

Aufl. Hierzu dient Gl. 2, §. 305. Es ist $a = \frac{(0,05)^2 . 3,1415}{4}$ $= 0,00196344$; $H = 1,6$; $g = 9,808$; $\varphi = 0,62$. Diese Werthe substituirt, gibt

$M = 0,62 . 0,00196344 . \sqrt{2 . 9,808 . 1,6} = 0,006819$ Kubikmeter

Aufg. 2. In wie viel Zeit wird aus dem Gefäße in der vorigen Aufgabe eine Wassermenge von 3 Kubikmeter fließen?

Aufl. Aus Gl. 3, §. 305, folgt

$$t = \frac{M}{\varphi a \sqrt{2gH}}.$$

Hier ist $M = 3$; $\varphi = 0,62$; $a = 0,00196344$; $H = 1,6$; $g = 9,808$. Setzt man die Werthe in diese Gleichung, so ergibt sich $t = 425,2$ Secunden, oder 7 Minuten 5,2 Secunden.

Aufg. 3. Wie viel Wasser wird aus obigem Gefäße innerhalb einer Stunde ausfließen?

Aufl. Hierzu dient die Gl. 3, §. 305, und es ist $t = 3600$ Secunden. Substituirt man die betreffenden Werthe, so findet man $M = 24,548$ Kubikmeter.

Aufg. 4. Wie viel Wasser würde aus gedachtem Gefäße in einer Stunde ausfließen, wenn die Oeffnung mit einer kurzen cylindrischen Ansatzröhre versehen wäre?

Aufl. Man hat hier $\varphi = 0,82$. Die übrigen Werthe sind wie in voriger Aufgabe. Substituirt man daher in die gleiche Formel, so erhält man $M = 32,471$ Kubikmeter.

Aufg. 5. Welchen Durchmesser muß man einer Oeffnung in einer dünnen Wand geben, wenn sie bei einer Druckhöhe von 2 Mtr. 0,027 Kubikmeter Wasser liefern soll?

Aufl. Ist d der Durchmesser, so ist $a = \frac{d^2\pi}{4}$, also $M = \frac{\varphi d^2 \pi}{4} \sqrt{2gH}$ und daraus

$$d = \sqrt{\frac{4M}{\varphi\pi\sqrt{2gH}}}.$$

Hier ist $M = 0,027$; $\varphi = 0,62$; $\pi = 3,1415$; $H = 2$; $g = 9,808$. Man erhält durch Substitution und Ausrechnung $d = 0,0941$ Meter.

Aufg. 6. In der Seitenwand eines Gefäßes befindet sich eine rechteckige Oeffnung von der Breite $= 1,2$ Mtr. und der Höhe

= 0,1 Mtr. Der Wasserstand über dem obern Rand der Oeffnung wurde bei ruhigem Wasser gemessen und zu 1,8 Mtr. gefunden, welches ist die Wassermenge?

Aufl. Benützen wir Tafel I, so finden wir für die Wasserhöhe 1,8 Mtr., und die Höhe der Oeffnung 0,1 Mtr., den Coefficienten $\varphi = 0{,}609$. Die Druckhöhe ist nun $H = 1{,}8 + \frac{0{,}1}{2} = 1{,}85$ Mtr.; $a = 0{,}1 . 1{,}2 = 0{,}12$. Daher

$$M = 0{,}609 . 0{,}12 \sqrt{2 . 9{,}808 . 1{,}85} = 0{,}429 \text{ Kubikmeter.}$$

§. 307.

Coefficienten bei unvollständiger Contraction. Wenn eine der Seiten der Oeffnung eine Verlängerung hat, oder wenn die untere Seite mit dem Boden des Gefäßes zusammenfällt, so ziehen sich die Wasserfäden an dieser Seite parallel hin, und es wird dadurch die Contraction an dieser Seite der Oeffnung aufgehoben. In gleichem Falle können sich noch andere Seiten der Oeffnung befinden. Hierdurch wird die ausfließende Wassermenge etwas vergrößert, und es erleidet der Contractionscoefficient eine Aenderung. Den Coefficienten für unvollständige Contraction erhält man nun auf folgende Weise. Wenn die Contraction nur auf drei Seiten der Oeffnung stattfindet, so multiplicire man den Coefficienten für vollständige Contraction mit 1,035; hat sie nur an zwei Seiten statt, mit 1,072, und findet sie sich nur an einer Seite, mit 1,125. Hierdurch erhält man im Allgemeinen, wenn der mittlere Werth für vollständige Contraction zu 0,62 genommen wird, beziehungsweise $\varphi = 0{,}642$; $\varphi = 0{,}664$; $\varphi = 0{,}697$. Für Schützenöffnungen mit verticaler Schütze, bei welchem der untere Stand sehr nahe am Boden sich befindet, nimmt man $\varphi = 0{,}625$. Wenn die beiden Seiten der Schützenöffnung und die Grundlinie in der Verlängerung des Gerinnes liegen, und die Schütze eine Neigung von etwa 26 Grad hat, so ist $\varphi = 0{,}74$; bei 45^0 aber $\varphi = 0{,}80$.

Aufg. 1. Welche Wassermenge fließt aus einer Oeffnung von 0,15 Mtr. Höhe und 1,50 Mtr. Weite, bei einem Wasserstand von 2,00 Mtr. über der Mitte, wenn die Contraction nur auf 3 Seiten stattfindet.

Aufl. Für vollständige Contraction würde man nach der Tafel I den Coefficient $= \frac{0{,}601 + 0{,}607}{2} = 0{,}604$ erhalten. Da aber die Contraction nur von drei Seiten stattfindet, so erhält man $\varphi = 0{,}604 . 1{,}035 = 0{,}625$. Ferner ist $a = 0{,}15 . 1{,}50 = 0{,}2250$; $H = 2$; somit ist

$$M = 0{,}625 . 0{,}2250 . \sqrt{2 . 9{,}808 . 2} = 0{,}880 \text{ Kubikmeter.}$$

Aufg. 2. Welche Wassermenge fließt aus obiger Oeffnung, wenn die Contraction nur auf einer Seite stattfindet?

Aufl. Hier ist $\varphi = 0{,}604 . 1{,}125 = 0{,}679$; daher

$$M = 0{,}679 . 0{,}2250 \sqrt{2 . 9{,}808 . 2} = 0{,}956 \text{ Kubikmeter.}$$

Aufg. 3. Wie viel Wasser fließt in 2 Minuten aus einer Schützenöffnung von 0,20 Mtr. Höhe, und 1,00 Mtr. Breite bei einer Druckhöhe von 1,40 Mtr., wenn die Schütze eine Neigung von 45^0 hat?

Aufl. Hier ist $\varphi = 0{,}80$; $a = 1{,}00 . 0{,}20 = 0{,}20$; $t = 120$; $H = 1{,}40$, also

$$M = 0{,}80 . 0{,}20 . 120 \sqrt{2 . 9{,}808 . 1{,}40} = 100{,}560 \text{ Kubikmeter.}$$

§. 308.

Abfluß des Wassers aus größern Seitenöffnungen oder bei sehr geringen Druckhöhen. Wenn die Druckhöhe über dem Mittelpunkt der Oeffnung im Vergleich zur verticalen Dimension derselben sehr klein ist, so fällt die mittlere Geschwindigkeit, d. h. diejenige, mit welcher man, um die theoretische Ausflußmenge zu erhalten, den Querschnitt multipliciren muß, nicht mehr mit der des centralen Fadens zusammen, wie dieß bei größern Druckhöhen angenommen werden kann.

Um nun für vorliegenden Fall die Wassermenge zu erhalten, nehmen wir an, das Gefäß X, Fig. 245, sei bis zur Höhe $AB = H$ mit Wasser gefüllt. Denkt man sich in die verticale Seitenwand MN beliebig viele kleine Oeffnungen B, D, F . . . in verschiedenen Höhen vertical unter einander angebracht, so wird das Wasser aus jeder solchen Oeffnung mit einer ihrer zugehörigen Druckhöhe entsprechenden Geschwindigkeit austreten. Diese Geschwindigkeiten seien repräsentirt durch die auf AB normalen Linien BC, DE, FG . . . Für irgend eine Oeffnung D sei die zugehörige Druckhöhe $AD = x$, und die entsprechende Geschwindigkeit $DE = y$, so hat man nach dem torricellischen Gesetze $y = \sqrt{2gx}$ oder $y^2 = 2gx$. Dieß ist aber die Gleichung einer Parabel, für welche x die Abscisse und y die Ordinate bezeichnet. Es folgt also, daß der Endpunkt E, sowie auch die Punkte C, G . . . in dieser Parabel liegen, deren Parameter 2g ist.

Aus jeder Oeffnung fließt nun eine Wassermenge, die dem Inhalt eines Prismas gleich ist, das zur Grundfläche die Oeffnung und zur Höhe die zugehörige Geschwindigkeit hat. Denkt man sich durch die ganze verticale Linie AB hindurch sämmtliche Oeffnungen zusammenhängend, oder einen feinen Schnitt AB nach der ganzen Wandhöhe, so wird der austretende Wasserkörper gleich sein dem Volumen eines Prismas, das die parabolische Fläche ABC zur Grundfläche, und die Breite des Schnittes zur Höhe hat. Denkt man sich so die ganze rechteckige Oeffnung abcd durch solche unendlich viele verticale Schnitte entstanden, so wird man das aus derselben in der Zeiteinheit fließende Wasserquantum erhalten, wenn man die Fläche ABC mit der Breite $cd = b$ der Oeffnung multiplicirt. Der Inhalt

der Parabelfläche ist aber $\frac{2}{3}$. AB . BC = $\frac{2}{3}$. H . $\sqrt{2gH}$. Somit ist die theoretische Wassermenge

$$M = \frac{2}{3} bH \sqrt{2gH}$$

und die wirkliche Wassermenge

$$M = \frac{2}{3} \varphi bH \sqrt{2gH}.$$

Ist nun die mittlere Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers = c, so ist die Wassermenge auch

$$M = bHc.$$

Durch Gleichsetzung beider Werthe erhält man:

$$bHc = \frac{2}{3} \varphi bH \sqrt{2gH}$$

und daraus
$$c = \frac{2}{3} \varphi \sqrt{2gH}.$$

Bedeutet z die der mittlern Geschwindigkeit entsprechende Druckhöhe, d. h. die mittlere Druckhöhe, so ist

$$c = \varphi \sqrt{2gz}$$

folglich
$$\varphi \sqrt{2gz} = \frac{2}{3} \varphi \sqrt{2gH}$$

daher
$$z = \frac{4}{9} H$$

d. h. **die mittlere Druckhöhe ist** = $\frac{4}{9}$ **der ganzen Druckhöhe oder** = $\frac{4}{9}$ **des Abstandes der untern Oeffnung vom Wasserspiegel.**

§. 309.

Wenn die Oeffnung abcd, Fig. 246, nicht bis zum Wasserspiegel reicht, sondern nur bis zur Höhe BC, so wäre für die Oeffnung a′b′cd, bei der Wasserhöhe AB = H, die Wassermenge = $\frac{2}{3}\varphi bH \sqrt{2gH}$; und für die Oeffnung a′b′ab, wenn die Höhe AC = h gesetzt wird, gleich $\frac{2}{3} \varphi bh \sqrt{2gh}$. Die Differenz beider Werthe muß offenbar die aus der Oeffnung abcd fließende Wassermenge M geben. Demnach muß sein

$$M = \frac{2}{3} \varphi bH \sqrt{2gH} - \frac{2}{3} \varphi bh \sqrt{2gh}$$

$$M = \frac{2}{3} \varphi b \sqrt{2g} \; [H \sqrt{H} - h \sqrt{h}] \; . \; . \; . \; 1.$$

Ist c die mittlere Geschwindigkeit und z die ihr zugehörige Druckhöhe, so ist wieder

$$b\,(H - h)\,c = \frac{2}{3}\,\varphi b\,\sqrt{2g}\,[H\sqrt{H} - h\sqrt{h}]$$

$$c = \frac{2}{3}\,\varphi\,\sqrt{2g}\,.\,\frac{H\sqrt{H} - h\sqrt{h}}{H - h}\;.\;.\;.\;2.$$

Es ist aber auch

$$c = \varphi\,\sqrt{2gz}$$

daher
$$\varphi\,\sqrt{2gz} = \frac{2}{3}\,\varphi\,\sqrt{2g}\,\frac{H\sqrt{H} - h\sqrt{h}}{H - h}$$

somit
$$z = \frac{4}{9}\left[\frac{H\sqrt{H} - h\sqrt{h}}{H - h}\right]^2 .\;.\;.\;3.$$

Für andere als rechteckige Ausflußöffnungen wird der Ausdruck für die Wassermenge viel zusammengesetzter.

Ist die Oeffnung kreisförmig und d der Durchmesser, h die Wasserhöhe über dem Mittelpunkt, so gibt folgende Formel die Wassermenge:

$$M = \frac{\varphi\pi d^2}{4}\sqrt{2gh}\left(1 - \frac{d^2}{128h^2} - \frac{d^4}{3277h^4} - \ldots\right).$$

Aufg. Eine Schleußenöffnung hat eine Breite von 1,2 Meter, eine Höhe von 0,5 Mtr. Ueber dem obern Rand steht das Wasser 0,64 Mtr. hoch. Welche Wassermenge fließt aus derselben?

Aufl. Hier ist nach §. 307 $\varphi = 0{,}625$; und nach obiger Formel 1 $H = 0{,}5 + 0{,}64 = 1{,}14$; $h = 0{,}64$; $b = 1{,}2$. Also

$$M = \frac{2}{3}\,.\,0{,}625\,.\,1{,}2\,.\,\sqrt{2\,.\,9{,}808}\,.\,[1{,}14\sqrt{1{,}14} - 0{,}64\,.\sqrt{0{,}64}] = 1{,}561\ \text{K.-Mtr.}$$

Ausfluß bei veränderlicher Druckhöhe.

§. 310.

Entleerungszeit eines Gefäßes ohne Wasserzufluß. Wenn das Wasser aus der Boden- oder Seitenöffnung eines Gefäßes fließt, bei welchem kein Zufluß stattfindet, so wird der Wasserspiegel sich allmählig senken, somit die Druckhöhe fortwährend bis zu Null abnehmen. Da aber die Geschwindigkeit des austretenden Wassers immer durch die Druckhöhe bedingt ist, so wird diese auch stets geringer werden und es verhalten sich diese Geschwindigkeiten in den verschiedenen Zeitpunkten wie die Quadratwurzeln aus den zugehörigen Druckhöhen. Demnach tritt das Wasser mit gleichförmig verzögerter Bewegung aus der Oeffnung. Es nimmt also dieselbe Bewegung an, wie ein frei vertical aufwärts geworfener Körper.

Ist nun H die anfängliche Druckhöhe, so ist die derselben entsprechende Ausflußgeschwindigkeit $= \sqrt{2gH}$, welche gleichförmig bis zu Null abnimmt. Die mittlere Geschwindigkeit ist deßhalb $v = \frac{1}{2}\sqrt{2gH}$. Es sei T die Zeit der Entleerung des Gefäßes, so ist der

von einer Wasserschichte in dieser Zeit T zurückgelegte Weg ebenso groß, als wenn sie sich diese Zeit hindurch mit der mittlern Geschwindigkeit gleichförmig fortbewegt hätte. Das ausgeflossene Wasserquantum ist also gleich dem Volumen eines Prismas, das den Querschnitt der Oeffnung zur Grundfläche und den in der Zeit T von einer Schichte mit der mittlern Geschwindigkeit zurückgelegten Weg zur Höhe hat. Ist nun a der Querschnitt der Oeffnung, A der des prismatischen Gefäßes, so ist die in der Zeit T ausfließende Wassermenge

$$\varphi a v T = \frac{1}{2} \varphi a T \sqrt{2gH}\,.$$

Das Wasserquantum in dem Gefäße ist aber gleich A.H, daher erhält man die Gleichung:

$$\frac{1}{2} \varphi a T \sqrt{2gH} = A.H$$

und hieraus die Entleerungszeit des Gefäßes:

$$T = \frac{2A.\sqrt{H}}{\varphi a \sqrt{2g}} \quad \ldots 1.$$

Bezeichnet T' die Zeit, in welcher das im Gefäße enthaltene Wasserquantum A.H bei constanter Druckhöhe ausfließen würde, so hat man

$$\varphi a T' \sqrt{2gH} = A.H$$

$$T' = \frac{A.\sqrt{H}}{\varphi a \sqrt{2g}} \quad \ldots 2.$$

Demnach wäre

$$T = 2T' \ldots 3$$

d. h. die Zeit der Entleerung eines prismatischen Gefäßes ist doppelt so groß als diejenige, in welcher dasselbe Wasserquantum bei constanter Druckhöhe ausgeflossen wäre.

Aufg. 1. Ein prismatischer Wasserbehälter hat einen Querschnitt von 80 Quadratmeter, eine Ausflußöffnung am Boden von 0,0028 Quadratmeter in einer dünnen Wand. Die Wasserhöhe beträgt 2 Meter. In welcher Zeit wird der Behälter sich entleeren?

Aufl. Hier ist nach Gl. 1 $A = 80$; $H = 2$; $a = 0{,}0028$; $\varphi = 0{,}62$; also

$$T = \frac{2.80.\sqrt{2}}{0{,}62.0{,}0028.\sqrt{2.9{,}808}} = 29417 \text{ Secunden}$$

oder 8 Stunden 10 Minuten 7 Secunden.

Aufg. 2. Wie groß muß man die Ausflußöffnung eines Behälters machen, der eine Querschnittsfläche von 36 □Meter hat und 2 Meter hoch mit Wasser gefüllt ist, wenn dasselbe in 5 Stunden ausfließen soll?

Aufl. Nach Gl. 1 ist $a = \frac{2A.\sqrt{H}}{\varphi T \sqrt{2g}}$. Hier hat man nun $A = 36$; $H = 2$; $T = 18000$; $\varphi = 0{,}62$; daher

$$a = \frac{2.36.\sqrt{2}}{0{,}62.18000.\sqrt{2.9{,}808}} = 0{,}001727 \text{ □Mtr.}$$

Für eine kreisförmige Oeffnung erhält man den Durchmesser $d = 0{,}046$ Meter.

§. 311.

Bestimmung der Zeit, in welcher der Wasserspiegel um eine gewisse Tiefe sinkt. Es sei t die Zeit, in welcher der Wasserspiegel um eine gegebene Tiefe x sinke. Man hat nun die volle Ausleerungszeit

$$T = \frac{2A \sqrt{H}}{\varphi a \sqrt{2g}}.$$

Ist T′ die Zeit der Ausleerung für das Wasserquantum von der Höhe H − x, so hat man

$$T' = \frac{2A\sqrt{H - x}}{\varphi a \sqrt{2g}}.$$

Die Differenz beider Ausdrücke gibt offenbar die Zeit, welche erforderlich war zum Sinken des Wasserspiegels um die Tiefe x. Es ist also t = T — T′ oder

$$t = \frac{2A \sqrt{H}}{\varphi a \sqrt{2g}} - \frac{2A \sqrt{H - x}}{\varphi a \sqrt{2g}}$$

$$t = \frac{2A}{\varphi a \sqrt{2g}} [\sqrt{H} - \sqrt{(H - x)}] \quad . \ . \ . \ 1.$$

Hieraus folgt nun auch die Tiefe x, um welche sich der Wasserspiegel in der Zeit t senkt, nämlich

$$x = H - \left(\sqrt{H} - \frac{a\varphi t \sqrt{2g}}{2A}\right)^2 \quad . \ . \ . \ 2.$$

Aufg. 1. Ein prismatischer Wasserbehälter hat einen Querschnitt von 36 Quadratfuß und ist bis zu einer Höhe von 9 Fuß mit Wasser gefüllt, die Ausflußöffnung beträgt 4 Quadratzoll. In welcher Zeit wird der Wasserspiegel sich um 5 Fuß senken?

Auflösung. Nach Gl. 1 ist A = 36; a = 0,04; H = 9; x = 5; g = 32,696. Also

$$t = \frac{2 . 36}{0{,}62 . 0{,}04 . \sqrt{2 . 32{,}696}} [\sqrt{9} - \sqrt{(9-5)}] = 360 \text{ Sec.} = 6 \text{ Min.}$$

Aufg. 2. Wie tief wird sich der Wasserspiegel bei voriger Aufgabe in 3 Minuten senken?

Aufl. Nach Gl. 2 erhält man:

$$x = 9 - \left(\sqrt{9} - \frac{0{,}04 . 0{,}62 . 180 . \sqrt{2 . 32{,}696}}{2 . 36}\right)^2 = 2{,}755 \text{ Fuß.}$$

Aufg. 3. Ein prismatisch geformter Teich hat einen Querschnitt von 1200 Quadratmeter; das Wasser tritt aus einer Schützenöffnung von 0,66 Mtr. Breite und 0,09 Mtr. Höhe. Der Wasserstand über dem Mittelpunkt der Oeffnung beträgt im Augenblick, wo die Schütze aufgezogen wird, 2,80 Mtr. Man fragt, um wie viel sich der Wasserspiegel in einer halben Stunde senken werde, wenn die Contraction nur an einer Seite stattfindet?

Aufl. Für diesen Fall kann $\varphi = 0{,}70$ genommen werden, ferner ist $H = 2{,}80$ Meter; $A = 1200$ Quadratmeter; $a = 0{,}66 . 0{,}09 = 0{,}0594$ Quadratmeter; $t = 1800''$; hiernach ergibt sich die verlangte Senkung zu:

$$x = 2{,}80 - \left(\sqrt{2{,}80} - \frac{0{,}70 . 0{,}0594 . 1800 \sqrt{2 . 9{,}808}}{2 . 1200}\right)^2 = 0{,}35 \text{ M.}$$

Aufg. 4. In wie viel Zeit wird sich der Wasserspiegel des Teiches in voriger Aufgabe um 2 Meter senken?

Aufl. Hier ist $x = 2$. Durch Einführung der bekannten Werthe in Gl. 1 erhält man die Zeit zu

$$t = \frac{2 . 1200}{0{,}70 . 0{,}0594 . \sqrt{2 . 9{,}808}} [\sqrt{2{,}80} - \sqrt{(2{,}80 - 2)}] = 10192''$$

oder 2 St. 49 M. 52 S.

§. 312.

Wassermenge, die in einer bestimmten Zeit ausfließt. Die in der Zeit t ausfließende Wassermenge sei M, dann ist offenbar

$$M = Ax.$$

Setzt man für x den Werth aus Gl. 2 des vorigen §, so erhält man die verlangte Wassermenge zu

$$H = AM - A\left(\sqrt{H} - \frac{a\varphi t \sqrt{2g}}{2A}\right)^2 \quad . \; . \; . \; 1.$$

Hieraus ergibt sich nun auch die Zeit t, in welcher eine gegebene Wassermenge M ausfließt, zu

$$t = \frac{2A}{a\varphi \sqrt{2g}} . \sqrt{\left[H - \sqrt{\left(H - \frac{M}{A}\right)}\right]} \quad . \; . \; . \; 2.$$

Aufg. 1. Welche Wassermenge wird aus dem Teiche Aufg. 3 des vorigen § in einer halben Stunde abfließen?

Aufl. Die dort für eine halbe Stunde gefundene Senkung des Wasserspiegels ist $x = 0{,}35$ Mtr.; daher die ausgeflossene Wassermenge

$$M = A . x = 1200 . 0{,}35 = 420 \text{ Kubikmeter.}$$

Aufg. 2. Ein cylindrisches Gefäß von 25 Fuß Höhe und 6 Fuß lichtem Durchmesser hat eine Oeffnung mit einer kurzen cylindrischen Ansatzröhre von 4 □″ Querschnitt. Wie lange muß man das Wasser ausfließen lassen, um 60 Kubikfuß Wasser zu erhalten, wenn das Gefäß anfänglich ganz gefüllt ist?

Aufl. Für eine cylindrische Ansatzröhre ist $\varphi = 0{,}82$; ferner ist $A = \frac{6^2 . 3{,}14}{4} = 28{,}26$ □′; $a = 0{,}04$; $H = 25$; $M = 60$; somit erhält man nach Gl. 2 die Zeit

$$t = \frac{2 . 28{,}26}{0{,}04 . 0{,}82 \sqrt{2 . 32{,}696}} \sqrt{\left[\sqrt{25} - \sqrt{\left(25 - \frac{60}{28{,}26}\right)}\right]} = 350''$$

$= 5$ M. 50 S.

§. 313.

Zeitbestimmung für eine bis zum Wasserspiegel reichende Oeffnung. Wenn eine rechteckige Oeffnung in einer verticalen Wand oben offen ist oder bis zum Wasserspiegel reicht, so findet man durch höhere Rechnung die Zeit t, in welcher sich der Wasserspiegel um x senkt, wenn A den horizontalen Querschnitt des Behälters, H die Höhe des Wasserstandes, b die Breite der Oeffnung bezeichnet, zu

$$t = \frac{3A[H\sqrt{(H-x)} - (H-x)\sqrt{H}]}{\varphi b\sqrt{2g}\,.\,[H(H-x)]}.$$

Aufg. An einem See von 16000 Quadratmeter Querschnitt befindet sich in einer verticalen Seitenwand eine 0,80 Mtr. breite Schützenöffnung. Der Wasserstand beträgt 2,00 Mtr. Wenn nun die Schütze ganz aufgezogen wird, so daß die Oeffnung bis zum Wasserspiegel reicht und eine prismatische Form des Sees vorausgesetzt wird, in wie viel Zeit wird der Wasserspiegel sich um 1 Meter senken?

Aufl. Nehmen wir an, die Contraction sei auf zwei Seiten aufgehoben, so ist $\varphi = 0{,}664$; ferner $A = 16000$; $b = 0{,}80$; $H = 2{,}00$; $x = 1{,}00$; demnach die verlangte Zeit

$$t = \frac{3\,.\,16000\,[2{,}00\,.\sqrt{(2-1)} - (2-1)\sqrt{2}]}{0{,}664\,.\,0{,}8\,.\sqrt{2\,.\,9{,}808}\,.\,[2\,(2-1)]} = 3\text{ St. } 6\text{ M. } 14\text{ Sec.}$$

§. 314.

Zeitbestimmung, wenn ein Wasserzufluß stattfindet. Findet während der Entleerung des Gefäßes ein Wasserzufluß m statt, so erhält man durch höhere Rechnung durch folgende Gleichung die Zeit, wenn die bisherigen Annahmen beibehalten werden:

$$t = \frac{A}{\varphi^2 a^2 g}\left[a\varphi\sqrt{2g}\,.\,[\sqrt{H} - \sqrt{(H-x)}] + m\log n\,.\,\frac{-m + a\varphi\sqrt{2gH}}{-m + a\varphi\sqrt{2g(H-x)}}\right].$$

Vom Abfluß aus einem Behälter in den andern.

§. 315.

Wenn die Wasserspiegel in beiden Behältern constant bleiben. Es kommt dieser Fall z. B. da vor, wo ein höher gelegener Kanal das Wasser durch eine Schützenöffnung eines Schleußenthors in einen tiefer gelegenen liefert. Es sei BD, Fig. 247, die Schützenöffnung, C ihr Schwerpunkt, AC = H der Abstand desselben vom Wasserspiegel im obern Kanal, CE = h der Abstand desselben vom Wasserspiegel im untern. Die Kraft, welche das Wasser zum Ausfließen zu bringen sucht, entspricht der Druckhöhe H, und diejenige, welche derselben entgegenwirkt, der Druckhöhe h. Die Kraft, welche demnach das Ausströmen wirklich bewirkt, entspricht somit der Diffe-

renz beider Druckhöhen über dem Punkte C, oder der Druckhöhe AC — EC = H — h. Ist a der Querschnitt der Oeffnung, φ der Contractionscoefficient, M die Wassermenge, so erhält man

$$M = \varphi a \sqrt{H - h}.$$

Es hat hier φ denselben Werth, wie wenn die Oeffnung in die freie Luft mündet, und für Schleußenthore $\varphi = 0{,}625$.

§. 316.

Wenn der obere Wasserspiegel constant bleibt, der untere sich hebt. Dieser Fall tritt da z. B. ein, wo aus einem Kanal das Wasser sich in einen kleinern abgeschlossenen Behälter oder in eine Schleußenkammer ergießt. Es sei F der kleinere Behälter, Fig. 248, in welchen das Wasser durch die Oeffnung C aus dem Behälter X, dessen Wasserhöhe constant bleibe, einströme. Es hebt sich nun der Wasserspiegel in dem Behälter F allmählig und es wird somit die dem Eintritt des Wassers entgegenwirkende Druckhöhe allmählig größer, folglich die Geschwindigkeit des Einströmens stets kleiner und zwar gleichförmig verzögert werden. Ist nun der Wasserspiegel z. B. bis nach BB′ gekommen und man will die Zeit bestimmen, in welcher er nach DD′ gekommen sein wird, so ist klar, daß hier die umgekehrte Aufgabe zu lösen ist, wie früher, wo durch das Sinken des Wasserspiegels die Ausflußgeschwindigkeit gleichförmig verzögert wurde und die Zeit zu bestimmen war, in welcher sich der Wasserspiegel um eine gewisse Tiefe senkte.

Bezeichnet nun H die Druckhöhe AB im Anfange der Zeit t, h die Druckhöhe AD am Ende derselben, A den Querschnitt des sich füllenden Behälters, a den der Oeffnung C, so hat man

$$t = \frac{2A}{\varphi a \sqrt{2g}} . [\sqrt{H} - \sqrt{h}] \; . \; . \; . \; 1.$$

Für die Zeit T der völligen Füllung wird h = 0, daher

$$T = \frac{2A}{\varphi a \sqrt{2g}} . \sqrt{H} \; . \; . \; . \; 2.$$

Diese Formeln sind wichtig für Bestimmung der Zeit bei Füllung der Schleußenkammern.

Es darf hier nicht unerwähnt bleiben, daß, wenn die beiden Schleußenthürchen der beiden Thore zu gleicher Zeit geöffnet sind, aus beiden nicht die doppelte Wassermenge fließt, wie wenn nur das eine geöffnet ist, obwohl beide gleichen Querschnitt haben. Sind beide zugleich geöffnet, so hat die Erfahrung den Cofficienten $\varphi = 0{,}548$ gegeben, während sonst $\varphi = 0{,}625$ ist.

Aufg. 1. In welcher Zeit wird das Gefäß F oder die Schleußenkammer vollends gefüllt werden, wenn anfänglich die Differenz der Wasserstände 0,30 Mtr. beträgt, der Abstand des Schwerpunktes der Oeffnung vom Oberwasserspiegel = 1,20 Meter; der Querschnitt der Ausflußmündung = 0,60 Quadratmeter und der Querschnitt des Gefäßes 220 Quadratmeter ist?

Aufl. Nach Gl. 1 ist hier $A = 220$; $H = 1{,}20$; $h = 0{,}30$; $a = 0{,}60$; daher

$$t = \frac{2.220}{0{,}625.0{,}60.\sqrt{2.9{,}808}}\cdot[\sqrt{1{,}20} - \sqrt{0{,}30}] = 145''$$

oder 2 M. 25 Sec.

Aufg. 2. In welcher Zeit wird der Raum FG der Schleußenkammer, Fig. 249, gefüllt, wenn der Oberwasserspiegel AB im Kanale X 1,949 Mtr. über dem Mittelpunkt C der Schützenöffnung DE des Oberthors liegt, und der Unterwasserspiegel FK in der Höhe des Fachbaums 0,325 Mtr. unter diesem Mittelpunkt? Der constante Querschnitt des zu füllenden Schleußenraums sei 325,6 Quadratmeter, der Querschnitt der Schütze = 0,6286 Quadratmeter?

Aufl. Man muß zuerst die Zeit berechnen, welche erforderlich ist, um den Raum FH bis zur Höhe des Mittelpunktes der Oeffnung C zu füllen. Diese Zeit findet man aus Gl. 3, §. 305. Es ist hier $a = 0{,}6286$; $H = 1{,}949$; $\varphi = 0{,}548$ für zwei Schützen; $M = 325{,}6.0{,}325$. Somit erhält man

$$t = \frac{325.0{,}325}{0{,}548.2.0{,}6286\sqrt{2.9{,}808.1{,}949}} = 24'', 85.$$

Die Zeit zur Füllung des Raumes CHGB erhält man nach Gl. 2 dieses Paragraphen. Hier ist $A = 325{,}6$; daher

$$T = \frac{2.325{,}6}{0{,}548.2.0{,}6286.\sqrt{2.9{,}808}}.\sqrt{1{,}949} = 298''$$

demnach ist die zur Füllung der ganzen Kammer erforderliche Zeit $t + T = 322'', 85 = 5'\,22'', 85$.

§. 317.

Wenn der obere Wasserspiegel sinkt, der untere constant bleibt. Wenn der Wasserspiegel BB′ in dem Gefäße F, Fig. 248, constant bleibt, und derjenige AA′ im Gefäße X sinkt, so findet man die Zeit t, in welcher letzterer um eine Tiefe $AD = x$ fällt, wenn der anfängliche Abstand AB beider Wasserspiegel mit H bezeichnet wird, durch folgende schon früher entwickelte Gleichung:

$$t = \frac{2A}{\varphi a\sqrt{2g}}\cdot[\sqrt{H} - \sqrt{(H - x)}] \; . \; . \; . \; 1.$$

Sinkt nun der Wasserspiegel AA′ zum Niveau von BB′ herab, so wird $x = H$. Demnach erhält man die Zeit T, nach welcher beide Wasserspiegel in einem Niveau liegen, zu:

$$T = \frac{2A}{\varphi a\sqrt{2g}}\cdot\sqrt{H} \; . \; . \; . \; 2.$$

Aufg. Wenn die Schleußenkammer, Fig. 249, bis BG gefüllt ist, so fragt es sich, in welcher Zeit sich der Schleußenraum BGKF bis auf die Höhe des Unterwassers FKZ durch die Oeffnung MN des Unterthores entleert, vorausgesetzt, daß der Wasserspiegel KZ im untern Kanal constant bleibt. Der Querschnitt der Oeffnung MN sei

0,6286 Quadratmeter, der Abstand beider Wasserspiegel BF = KG = 2,3 Meter.

Aufl. Hier ist H = 2,3 Mtr.; A = 325,6; a = 0,6286; φ = 0,625 für eine Schützenöffnung. Somit erhält man die verlangte Zeit nach Gl. 2

$$T = \frac{2.325,6}{0,625.0,6286\sqrt{2.9,808}}.\sqrt{2,3} = 567 = 9' 27''.$$

§. 318.

Wenn der obere Wasserspiegel sinkt, während der untere sich hebt. Dieser Fall tritt ein, wenn das Wasser aus dem gefüllten Behälter BE, Fig. 250, durch eine Verbindungsröhre (oder Oeffnung), welche etwa mit einem Hahn geschlossen werden kann, in den Behälter GM übertritt. Es wird dann bei hergestellter Communication im ersten der Wasserspiegel sinken, während der im andern steigt. Denken wir uns, die Verbindungsöffnung sei verschlossen, und es seien AB und CD die ursprünglichen Wasserspiegel. Nun werde die Verbindung hergestellt, und es sinke der Wasserspiegel AB in einer Zeit t nach A'B', während der andere CD sich nach LM hebt. Ist nun BF = H; CG = h; BB' = x; A der Querschnitt des Behälters BE; B der von GM; a der der Oeffnung oder Verbindungsröhre, sämmtlich von prismatischer Form, so findet man durch höhere Rechnung:

$$t = \frac{2A\sqrt{B}}{\varphi a\sqrt{2g}.(A+B)}.[\sqrt{B(H-h)} - \sqrt{(A+B)x - AH - BH}] \ldots 1$$

und die Zeit T, nach welcher beide Wasserspiegel gleich hoch stehen:

$$T = \frac{2.AB\sqrt{H-h}}{\varphi a\sqrt{2g}.(A+B)} \ldots 2.$$

Aufg. Zwei zusammenhängende Schleußen eines Schifffahrtkanals sind durch ein Schleußenthor getrennt, in welchem sich eine Schützenöffnung von 0,624 Quadratmeter befindet. Ueber dem Mittelpunkt dieser Oeffnung stehe der Wasserspiegel in der obern Schleuße 4,14 Mtr., in der untern 0,24 Mtr. Der Querschnitt der obern Schleuße sei 205 Quadratmeter, der untern 215 Quadratmeter. Man soll die Zeit bestimmen, in welcher die Wasserspiegel in beiden Kammern gleich hoch stehen werden, vom Augenblicke an, wo die Schütze aufgezogen wird?

Aufl. Nach Gl. 2 ist hier A = 205; B = 215; H = 4,14; h = 0,24; φ = 0,625; demnach

$$T = \frac{2.205.215.\sqrt{4,14-0,24}}{0,625.0,624\sqrt{2.9,808}.420} = 240'' = 4'.$$

Zweites Kapitel.

Von der Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen.

§. 319.

Einleitung. Mehrere an ihren Enden zusammengefügte Röhren, durch welche das Wasser aus einem Behälter nach einem bestimmten Orte hingeführt wird, nennt man eine Röhrenleitung. Sie ist einfach und heißt auch Strang, wenn blos eine solche zusammengesetzte Röhre vorhanden ist, im Gegensatz zu einem System von Leitungen, das aus mehreren Strängen besteht. Der verticale Abstand EF, Fig. 251, des Mittelpunktes der Ausflußöffnung von der Ebene des Wasserspiegels AB im Reservoir heißt die Druckhöhe. Der Umfang des lichten Querschnitts der Röhre heißt der benetzte Umfang.

Der Theorie nach sollte nun die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser aus der Röhre fließt, der Druckhöhe H entsprechen und gleich $\sqrt{2gH}$ sein. Allein die Erfahrung zeigt, daß die wirkliche Geschwindigkeit diesen Werth nicht erreicht. Ist die Röhre geneigt, so sollte theoretisch genommen, die Bewegung des Wassers in derselben eine beschleunigte sein. Es zeigt aber die Erfahrung, daß die Bewegung eine gleichförmige ist, sobald das Wasser einmal eine gewisse Geschwindigkeit erlangt hat. Hieraus folgt, daß die Röhre der Bewegung des Wassers einen gewissen Widerstand entgegensetzt, wodurch die Austrittsgeschwindigkeit vermindert, und die Beschleunigung aufgehoben wird. Es wird also ein Theil der vorhandenen Druckhöhe durch diesen Widerstand, den man den Röhrenwiderstand nennt, absorbirt.

Ist nun v die Austrittsgeschwindigkeit des Wassers, so ist die ihr entsprechende Druckhöhe $= \frac{v^2}{2g}$. Diese muß nun kleiner sein als H und zwar um diejenige Höhe, welche dem Röhrenwiderstand entspricht. Bezeichnet w diese Widerstandshöhe, so ist

$$w = H - \frac{v2}{2g}.$$

§. 320.

Bestimmung des Röhrenwiderstands. Betrachten wir eine gerade gleich weite Röhre. Wenn die Röhre voll fließt, d. h. wenn sie ganz mit Wasser ausgefüllt ist, so wirkt die Adhäsion der Röhre ringsum auf das Wasser hemmend ein, und ist also um so größer, je größer der benetzte Umfang eines Querschnitts ist. Diese Adhäsion wirkt aber nicht allein auf die berührende Wasserschichte, sondern auch auf die mehr nach dem Centrum gelegenen, und sucht sie in ihrer Bewegung zu hemmen. Allein die Kraft der Anziehung nimmt gegen das Innere der Röhre zu immer mehr ab und wirkt

also auf gleiche Flächentheile um so geringer. Dieser Widerstand ist daher proportional dem benetzten Umfange, und umgekehrt proportional dem Querschnitt der Röhre. Je länger nun die Röhre ist, von desto mehr Punkten muß das Wasser in jedem Augenblicke losgerissen werden. Es ist demnach der gedachte Widerstand auch proportional der Länge der Röhre. Wird ferner die Geschwindigkeit des Wassers größer, z. B. doppelt so groß, so müssen in derselben Zeit nicht allein doppelt so viele Wassertheile losgerissen, sondern diese müssen auch mit der doppelten Geschwindigkeit fortgestoßen werden, wodurch also eine im quadratischen Verhältnisse größere Kraft erforderlich wird. Der Widerstand ist daher auch dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional. Endlich hat die Klebrigkeit des Wassers noch Einfluß auf den Widerstand, der jedoch erst bei geringer Geschwindigkeit bemerkbar wird und der Geschwindigkeit proportional gesetzt werden kann.

Es sei nun L die Länge der Röhre, p der benetzte Umfang, J der Querschnitt der Röhre, A und B zwei constante Coefficienten, so erhält man für den Röhrenwiderstand w folgenden allgemeinen Ausdruck:

$$w = H - \frac{v^2}{g} = \frac{ApL}{gJ} (v^2 + Bgv) \; . \; . \; . \; 1.$$

Die Werthe der Coefficienten A und B sind durch sorgfältig angestellte Versuche bestimmt worden, und man hat für jedes Maßsystem A = 0,0033595; B = 0,0056. Setzt man diese Werthe in die Gleichung, so erhält man:

$$w = H - \frac{v^2}{2g} = 0{,}0033595 \frac{pL}{gJ} (v^2 + 0{,}0056\, gv) \; . \; . \; . \; 2.$$

Da der Einfluß der Contraction bei der Einmündung in das Reservoir schon in den Coefficienten A und B enthalten ist, so wird das Glied $\frac{v^2}{2g}$ nicht mit dem Contractionscoefficienten versehen.

Wenn die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre größer ist als 0,6 Meter, so kann man das zweite Glied in der Klammer der vorigen Gleichung vernachlässigen. Für diesen Fall ändert sich der Coefficient A etwas, und es wird A = 0,00352. Demnach erhält man:

$$w = H - \frac{v^2}{2g} = 0{,}00352 \,.\, \frac{pL}{gJ} \,.\, v^2 \; . \; . \; . \; 3.$$

Ist D der lichte Durchmesser der cylindrischen Röhre, so ist p $= \pi D$; $J = \frac{\pi D^2}{4}$. Substituirt man diese Werthe in die obigen Gleichungen, so erhält man die Grundgleichungen:

$$H - \frac{v^2}{2g} = 0{,}01344 \frac{L}{gD} (v^2 + 0{,}0056\, gv) \; . \; . \; . \; 4$$

und für Geschwindigkeiten größer als 0,6 Meter

$$H - \frac{v^2}{2g} = 0{,}01408 \frac{Lv^2}{gD} \; . \; . \; . \; 5.$$

§. 321.

Gleichungen für die Geschwindigkeit und Wassermenge. Bedeutet M die Wassermenge für die Secunde, so ist $M = \frac{\pi D^2}{4} . v$, also $v = \frac{4M}{\pi D^2}$. Aus den Gleichungen 4 und 5 des vorigen Paragraphen läßt sich nun die Geschwindigkeit v unmittelbar entwickeln. Führt man alsdann den Werth von M ein, so kann man die Wassermenge bestimmen. Man erhält sonach aus Gl. 4 die allgemeinen Gleichungen:

$$v = -\frac{0{,}002804\,Lg}{L + 37{,}2\,D} + \sqrt{\left[\frac{74{,}405\,HDg}{L + 37{,}2D} + \left(\frac{0{,}002804\,Lg}{L + 37{,}2\,D}\right)^2\right]} \ldots 1.$$

$$M = -\frac{0{,}002202\,LD^2g}{L + 37{,}2\,D} + \sqrt{\left[\frac{45{,}897\,HD^5g}{L + 37{,}2\,D} + \left(\frac{0{,}002202\,LD^2g}{L + 37{,}2\,D}\right)^2\right]}. 2.$$

Hat die Röhre eine solche Länge, daß man 37,2D gegen L vernachlässigen kann, so erhält man allgemein:

$$v = -0{,}002804\,g + \sqrt{\left[\frac{74{,}405\,gHD}{L} + 0{,}00000786\,g^2\right]} \ldots 3.$$

$$M = -0{,}002202\,D^2g + D^2\sqrt{\left[\frac{45{,}897\,gHD}{L} + 0{,}00000485\,g^2\right]} \ldots 4.$$

Kann ferner noch das zweite Glied unter dem Wurzelzeichen außer Acht gelassen werden, so wird

$$v = -\ 0{,}002804\,g + 8{,}626\sqrt{\frac{gHD}{L}} \ldots 5.$$

$$M = -\ 0{,}002202\,D^2g + 6{,}775\,D^2\sqrt{\frac{gHD}{L}} \ldots 6.$$

Aufg. Eine gerade Röhrenleitung hat eine Länge von 1500 Mtr. und einen Durchmesser von 0,3 Mtr.; welche Wassermenge liefert dieselbe bei 5,3 Mtr. Druckhöhe?

Aufl. Hier ist L = 1500; D = 0,3; H = 5,3. Rechnet man nach Gl. 4, so erhält man M = 0,062 Kubikm., und nach Gl. 6 wird M = 0,064 Kubikm.

§. 321 a.

Für Geschwindigkeiten, die größer sind als 0,6 Meter, erhält man aus Gl. 5, §. 320

$$v = 8{,}427\sqrt{\frac{gHD}{L + 35{,}5\,D}} \ldots 1.$$

$$M = 6{,}619\,D^2\sqrt{\frac{gHD}{L + 35{,}5\,D}} \ldots 2.$$

Kann man 35,5D gegen L vernachlässigen, so wird

$$v = 8{,}427\sqrt{\frac{gHD}{L}} \ldots 3.$$

$$M = 6{,}619\,D^2\sqrt{\frac{gHD}{L}} \ldots 4.$$

Für Metermaß erhält man

$$v = 26{,}39 \sqrt{\frac{HD}{L}} \ldots 5.$$

$$M = 20{,}73 D^2 \sqrt{\frac{HD}{L}} \ldots 6.$$

Für badisches Fußmaß

$$v = 48{,}185 \sqrt{\frac{HD}{L}} \ldots 7.$$

$$M = 37{,}847 D^2 \sqrt{\frac{HD}{L}} \ldots 8.$$

Aufg. 1. Bei einer Röhrenleitung von 3000 Mtr. Länge und 11,366 Mtr. Druckhöhe beträgt der Durchmesser 0,25 Meter. Man soll die Geschwindigkeit des Wassers und die Wassermenge bestimmen.

Aufl. Es ist hier L = 3000; H = 11,366; D = 0,25. Nach den Gleichungen 5 und 6 erhält man v = 0,518 Mtr.; M = 0,0402 Kubikmeter.

Aufg. 2. Eine Röhrenleitung hat eine Länge von 1000 Mtr., eine Druckhöhe von 30 Mtr. und einen Durchmesser von 0,15 Mtr. Welches ist die Geschwindigkeit des Wassers und die Wassermenge?

Aufl. Es ist hier L = 1000; H = 30; D = 0,15. Setzt man diese Werthe in die Gleichungen 5 und 6, so erhält man beziehungsweise v = 1,583 Mtr.; M = 0,02798 Kubikmeter.

§. 322.

Bestimmung des Röhrendurchmessers und der Druckhöhe. Aus der Gleichung 2, §. 321 findet man zur Bestimmung des Durchmessers folgende allgemeine Gleichung:

$$D^5 - 0{,}00009594 \frac{LMD^2}{H} - 0{,}8102 \frac{M^2 D}{Hg} - 0{,}02177 \frac{LM^2}{Hg} = 0 \ldots 1.$$

Um den ersten Annäherungswerth zu finden, läßt man das zweite und dritte Glied dieser Gleichung außer Acht und man erhält dann

$$D = 0{,}465 \sqrt[5]{\frac{LM^2}{Hg}}.$$

Diesen so gefundenen Werth von D führt man sofort in das zweite und dritte Glied der Gleichung ein und rechnet den zweiten Annäherungswerth, welcher schon genauer wird als der vorige. Dieses Verfahren wiederholt man so lange, bis der Durchmesser genau genug gefunden ist.

Für Geschwindigkeiten, welche größer sind als 0,6 Meter, erhält man aus Gl. 4, §. 322 den Durchmesser

$$D = 0{,}47 \sqrt[5]{\frac{LM^2}{Hg}} \ldots 2.$$

Um die Druckhöhe für große Geschwindigkeiten zu bestimmen, erhält man aus Gl. 2, §. 322

$$H = \frac{M^2 (L + 35{,}5 D)}{43{,}81 g D^5} \ldots 3.$$

und für sehr lange Röhren aus Gl. 4, §. 322

$$H = \frac{M^2 L}{43{,}81\,g D^5} \quad . . . 4.$$

Aufg. 1. Welchen Durchmesser muß man einer geraden Röhrenleitung von 1000 Mtr. Länge bei einer Druckhöhe von 10 M. geben, wenn sie in der Secunde 0,054 Kubikmeter Wasser liefern soll?

Aufg. 2. Welchen Durchmesser muß man einer Röhrenleitung geben, die 14000 badische Fuß lang ist und eine Druckhöhe von 36 Fuß hat, wenn sie in der Secunde 2,5 Kubikfuß Wasser liefern soll?

Es ist hier $L = 14000$; $H = 36$; $M = 2{,}5$.

Aufg. 3. Eine Röhrenleitung hat eine Länge von 1000 Mtr. und einen Durchmesser von 0,15 Mtr. Wie groß muß die Druckhöhe sein, wenn sie eine Wassermenge von 0,0266 Kubikmeter liefern soll?

Aufl. Es ist hier $L = 1000$; $D = 0{,}15$; $M = 0{,}0266$. Rechnet man nach Gleichung 3, so erhält man $H = 21{,}78$ Meter und nach Gl. 4 $H = 21{,}68$ Mtr.

Aufg. 4. Eine Röhrenleitung von 2000 Mtr. Länge soll bei einer Druckhöhe von 3 Meter in jeder Secunde 0,011 Kubikmeter Wasser liefern; welchen Durchmesser muß man ihr geben?

§. 323.

Widerstand durch Biegung. Bewegt sich ein materieller Punkt mit der Geschwindigkeit v nach der Richtung AD, Fig. 252, und wird er in B genöthigt, plötzlich nach der Richtung BC fortzugehen, so bewegt er sich in letzterer Richtung mit der Geschwindigkeit $v \cos DBC$ und erleidet demnach einen Verlust an Geschwindigkeit, welcher gleich ist: $v\left(\sin \frac{1}{2} DBC\right)^2$. Wenn dagegen die Richtungsänderung allmählig vor sich geht, indem sich der Punkt in einer krummen Linie bewegt, so erleidet er keinen Geschwindigkeitsverlust. Wenn nun eine Leitungsröhre eine plötzliche Wendung macht, so müßte das Wasser hier durch einen Geschwindigkeitsverlust gleich $v\left(\sin \frac{1}{2} DBC\right)^2$ erleiden. Ist hingegen die Wendung der Röhre abgerundet und ist jeder Flüssigkeitsfaden mit der Röhrenaxe parallel, so dürfte kein Geschwindigkeitsverlust entstehen. In der Wirklichkeit zeigt sich dieß jedoch anders, denn es findet bei jeder Wendung, sie mag plötzlich oder allmählig sein, ein Geschwindigkeitsverlust statt. Es muß also ein Theil der vorhandenen Kraft oder Druckhöhe aufgewendet werden, um diesen zu ersetzen oder den durch die Krümmung entstehenden Widerstand zu überwinden.

Versuche haben nun dargethan, daß der durch die Krümmung oder Biegung der Röhre herrührende Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit und dem des Sinus des Anprallwinkels DBC proportional ist. Bezeichnet w' diese entsprechende Widerstandshöhe, v die Geschwindigkeit, s den Sinus des Anprallwinkels, k einen Erfahrungscoefficienten, so hat man allgemein

$$w' = k \,.\, \frac{v^2 s^2}{g}.$$

Es ist nun für jedes Maßsystem $k = 0{,}121$, somit

$$w' = 0{,}121 \,.\, \frac{v^2 s^2}{g}.$$

Kommen mehrere Biegungen vor und sind s', s'', s''' . . . die Sinusse der Anprallwinkel, so erhält man die Widerstandshöhe

$$w' = 0{,}121 \,.\, \frac{v^2}{g} (s'^2 + s''^2 + s'''^2 + \ldots)$$

$$w' = 0{,}121 \frac{v^2}{g} \Sigma s^2 \ldots 1.$$

Führt man die Wassermenge ein, so erhält man

$$w' = 0{,}196 \frac{M^2}{gD^4} \Sigma s^2 \ldots 2.$$

Der Verlust an Druckhöhe durch die Krümmungen wird oft auch durch eine andere Gleichung bestimmt. Bedeutet nämlich r den Krümmungshalbmesser der Biegung, b die Länge des Bogens, so hat man für eine Biegung

$$w' = \frac{v^2}{2g} (0{,}0003976g + 0{,}0186r) \frac{b}{r^2} \ldots 3.$$

Aufg. Bei einer Röhrenleitung kommen 5 Biegungen vor. Der Anprallwinkel von dreien derselben beträgt 24°, von zweien 32°. Welches ist der dadurch erzeugte Verlust an Druckhöhe, wenn das Wasser 0,8 Mtr. Geschwindigkeit besitzt?

Aufl. Nach Gleichung 1 ist nun $v = 0{,}8$ Meter; $\Sigma s^2 = 3.(\sin 24^0)^2 + 2.(\sin 32^0)^2 = 3.0{,}40674^2 + 2.0{,}52992^2 = 1{,}05791$, daher $w' = \frac{0{,}121 . 0{,}64}{9{,}808} . 1{,}05791 = 0{,}00737$ Mtr.

§. 324.

Widerstand durch verengte Querschnitte. Wenn eine Leitung nicht überall gleich weit ist, sondern verengte Querschnitte vorkommen, so entsteht hierdurch eine Contraction und somit ein weiterer Widerstand oder Verlust an Druckhöhe. Nehmen wir vorerst an, es sei nur ein verengter Querschnitt vorhanden und zwar die Ausmündung, und es sei D der Durchmesser der Röhre, d der des verengten Querschnitts der Ausmündung, v die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre, V die im verengten Querschnitt, φ der Contractionscoefficient, w'' die für diesen Widerstand erforderliche Druckhöhe. Die der Geschwindigkeit v entsprechende Druckhöhe ist $\frac{v^2}{2g}$, die der Geschwindigkeit V entsprechende ist $\frac{V^2}{2g}$. Um daher die Wassermasse M von der Geschwindigkeit v auf die Geschwindigkeit V im verengten Querschnitt zu bringen, ist eine Arbeitsgröße

$$W = M\left(\frac{V^2 - v^2}{2g}\right)$$

erforderlich. Diese Arbeitsgröße muß aber auch durch die Druckhöhe w'' verrichtet werden, also ist $W = Mw''$. Demnach folgt aus beiden Ausdrücken die Widerstandshöhe

$$w'' = \frac{V^2 - v^2}{2g}.$$

Es ist nun $M = \frac{1}{4}\pi D^2 v$ und auch $M = \frac{1}{4}\varphi\pi d^2 V$.

Nimmt man hieraus die Werthe von v und V und setzt sie in vorige Gleichung, so erhält man die der Contraction entsprechende Druckhöhe

$$w'' = 0{,}81057\,\frac{M^2}{g}\left(\frac{1}{\varphi^2 d^4} - \frac{1}{D^4}\right)\ .\ .\ .\ 1.$$

Sind mehrere Verengungen vorhanden, Fig. 253, so erhält man für eine jede Verengung den ähnlichen Ausdruck. Ist demnach w'' die Widerstandshöhe, welche für die Contraction in sämmtlichen Verengungen erforderlich ist, so hat man

$$w'' = 0{,}81057\,\frac{M^2}{g}\,\Sigma\left(\frac{1}{\varphi^2 d^4} - \frac{1}{D^4}\right)\ .\ .\ .\ 2.$$

Allgemeine Gleichung. Wir haben bisher die drei Widerstände, welche bei den Röhrenleitungen vorkommen können, einzeln betrachtet und wollen nun sämmtliche in einer Gleichung zusammenfassen. Behalten wir die bisherige Bezeichnung bei, so erhält man allgemein:

$$H - \frac{v^2}{2g} = \frac{A}{g}\,\Sigma\,\frac{pL}{J}\,(v^2 + Bgv) + \frac{0{,}121\,v^2}{g}\,.\,\Sigma s^2.$$
$$+ 0{,}81057\,\frac{M^2}{g}\left[\Sigma\left(\frac{1}{\varphi^2 d^4} - \frac{1}{D^4}\right)\right].$$

§. 325.

Druck des Wassers gegen die Röhrenwände. Es fließe das Wasser aus dem Gefäße AL, Fig. 254, durch die horizontale gleichweite Röhre BC. Nehmen wir an, dieselbe sei an der Ausmündung C nicht verengt und abstrahiren wir vorerst von allen Widerständen, so wird das Wasser mit einer der Druckhöhe AB = H entsprechenden Geschwindigkeit in der Leitung sich bewegen und die obere Röhrenwand wird durchaus keinen Druck erleiden, da die ganze Druckhöhe auf die der Axe parallele Geschwindigkeit verwendet ist und also keine verticale Wirkung äßern kann. Es wird diese Röhre sich verhalten wie ein oben offener Kanal, wobei kein Druck nach oben stattfindet. Der untere Theil der Röhre hat natürlich immer das Gewicht des auf ihm liegenden Wassers zu tragen. Verschließt man aber das Röhrenende C, so wird jeder Punkt G, J, S einen Druck erleiden gleich dem Gewicht einer Wassersäule, welche H zur Höhe hat. Denkt man sich in G, J, S Oeffnungen und auf diese verticale Röhren GF, JE, SR gesetzt, so

wird nach dem Gesetze der communicirenden Röhren das Wasser in allen auf die Höhe H steigen, oder es werden die Wasseroberflächen alle in der horizontalen Ebene AD liegen.

Oeffnet man aber die Röhre bei C nur zum Theil, so daß die Ausflußöffnung kleiner wird als der Röhrenquerschnitt, dann wird das Wasser in der Röhre sich mit einer geringern Geschwindigkeit v bewegen. Die derselben entsprechende Druckhöhe $h = \frac{v^2}{2g}$ wird also parallel der Röhrenaxe wirken. Die ganze Druckhöhe H ist aber immerhin vorhanden und es muß also der auf die Geschwindigkeit v nicht verwendete Theil, nämlich $H - \frac{v^2}{2g} = h'$ noch auf alle Röhrentheile wirken und folglich auch einen Druck nach oben ausüben. Daher wird sich das Wasser in den Röhren auf eine Höhe $H - \frac{v^2}{2g}$ oder bis zur Horizontalen MN erheben. Es ist also $AM = \frac{v^2}{2g}$ die Höhe, welche der Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre entspricht, und $BM = H - \frac{v^2}{2g}$ die noch übrige Druckhöhe. Auf diesen Betrachtungen beruht das Princip von Bernoulli, das durch Versuche auch für nicht horizontale Röhren bestätigt ist und also heißt:

Der Druck, welchen das in Bewegung befindliche Wasser in einer Röhre gegen jeden Punkt der Röhrenwand ausübt, ist gleich der totalen Druckhöhe über diesem Punkt, weniger der Druckhöhe, welche der Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre entspricht.

Hieraus ergibt sich also, daß der Druck des bewegten Wassers geringer ist als der des ruhenden oder der hydrostatische Druck.

Der Satz von Bernoulli bleibt auch dann noch richtig, wenn die Röhrenwiderstände mit in Betracht gezogen werden. Die Widerstände absorbiren einen Theil der Druckhöhe, welcher mit der Länge der Röhre von A nach C zunimmt und der also nicht mehr auf die Röhrenpunkte sich äußern kann und folglich die obige Druckhöhe $H - \frac{v^2}{2g}$ noch vermindert. Ist z. B. NP der der ganzen Länge entsprechende Röhrenwiderstand, so bleibt für den Druck in C noch eine Höhe PC übrig. Zieht man die Linie MP, so wird ab den Röhrenwiderstand für den Punkt J oder für den Röhrentheil BJ darstellen und es wird in diesem Punkte der Druck nur noch der Höhe bJ entsprechen.

Bedeutet nun Z die dem Druck auf irgend eine Stelle entsprechende Wasserhöhe, w die den sämmtlichen in der Röhre vorkommenden Widerständen entsprechende Höhe vom Behälter bis zur betrachteten Stelle, so ist

$$Z = H - \frac{v^2}{2g} - w.$$

Man findet also die dem Druck auf eine Stelle der Leitung entsprechende Druckhöhe, wenn man von dem senkrechten Abstand dieser Stelle vom Wasserspiegel die Geschwindigkeitshöhe des Wassers in der Röhre und die Druckhöhe abzieht, welche sämmtlichen Widerständen des Röhrentheils vom Behälter bis zur betrachteten Stelle entspricht, es mag die Röhre eine horizontale oder geneigte Lage haben.

Der Wasserdruck an irgend einer Stelle der Leitung kann auch direct gemessen werden durch eine an dieser Stelle vertical aufgesetzte Röhre, in welcher das Wasser in die Höhe steigen kann. Eine solche Röhre, die also dazu dient, den Wasserdruck an irgend einer Stelle der Leitungsröhre zu messen, nennt man Piezometer.

Kennt man nun den Druck, den die Röhrenwand auszuhalten hat, so läßt sich ihre Stärke bestimmen nach §. 288.

§. 326.

Von den springenden Strahlen. Wenn ein Wasserstrahl aus einer horizontalen Oeffnung mit einer Geschwindigkeit v tritt und vertical in die Höhe steigt, so sollte er die Höhe $Z = \frac{v^2}{2g}$ erreichen. Verschiedene Ursachen aber bewirken, daß diese Strahlhöhe niemals erreicht wird. Die Hauptursache ist der Widerstand der Luft. Bei geringen Höhen ist dieser zwar unbeträchtlich, nimmt aber mit der Druckhöhe proportional zu. Außerdem, daß der Strahl die Luft aus ihrer Stelle verdrängen muß, erzeugt auch dieser Widerstand eine Trennung der Wasserfäden des Strahls, wodurch deren Steigkraft geschwächt wird. Durch die Adhärenz der Wassertheile wirkt auch der obere Theil des Strahles hemmend auf das Aufsteigen des untern Theils, wodurch eine Ausbreitung des Strahls erfolgt. Auch haben die herabfallenden Wassertheile einen störenden Einfluß und tragen zur Verminderung der Sprunghöhe bei. Die wahre Strahlhöhe läßt sich theoretisch nicht bestimmen. Man hat daher gesucht sie durch Erfahrung zu ermitteln. Bezeichnet h die der Geschwindigkeit v entsprechende Höhe, so gibt die Erfahrung die Annäherungsformel

$$Z = h - 0{,}1 \frac{h^2}{g}.$$

Strömt der Strahl horizontal aus oder bildet er mit dem Horizont einen schiefen Winkel, so nennt man die Entfernung zwischen der Ausflußmündung und dem Ort, wo der Strahl die durch die Mündung gelegte Horizontalebene trifft, die Sprungweite. Man kann annehmen, daß der Strahl in beiden Fällen eine Parabel bilde und es finden zur Bestimmung der Strahlhöhe und Sprungweite die Gleichungen von der Wurfbewegung ihre Anwendung.

Drittes Kapitel.

Von der Bewegung des Wassers in Flußbetten und Kanälen.

§. 327.

Einleitung. Die Rinne oder Höhlung der Erdoberfläche, in welcher das Wasser eines Flusses oder Kanals fließt, nennt man das Bette desselben. Man unterscheidet dabei das Grundbette oder die Sole und die beiden Uferwände. Schneidet man das Bette durch eine auf der Richtung des Fließens rechtwinkelig stehenden Ebene, so entsteht das Querprofil. Der Theil vom Umfange des Querprofils, welcher mit dem Wasser in Berührung steht, heißt der benetzte Umfang. Führt man eine verticale Fläche nach der Richtung des Fließens durch das Bette, so erhält man das Längenprofil. Die Neigung des Längenprofils gegen den Horizont heißt man das Gefälle. Das Totalgefälle ist der verticale Abstand der Horizontalebenen, die durch die Einmündung oder Quelle und Ausmündung gelegt werden. Unter dem relativen Gefälle versteht man den verticalen Abstand zweier Horizontalebenen, welche durch die beiden Endpunkte einer gewissen Strecke des Flusses gelegt werden. Gewöhnlich wird dasselbe auch ausgedrückt durch das Verhältniß des Fallens gleich der Einheit zur entsprechenden Länge des Längenprofils. Der Abhang für eine Strecke wird ausgedrückt durch den Quotienten, welchen man erhält, wenn man den Verticalabstand der beiden Endpunkte durch die Länge der Strecke dividirt. Diejenige Stelle, wo das Wasser die größte Geschwindigkeit hat, heißt der Stromstrich und die tiefste Stelle im Bette die Stromrinne.

Ein Kanal unterscheidet sich von einem Flusse durch sein reguläres Bette, sein überall gleiches Querprofil, sein durchaus gleiches Gefälle und dadurch, daß er auf seiner ganzen Länge die gleiche Wassermaſe führt.

§. 328.

Die Schwere ist die Ursache der Bewegung des Wassers. In geneigten Betten sollte die Bewegung nach den Gesetzen der Schwere eine beschleunigte sein. Allein die Erfahrung zeigt, daß dieß nicht der Fall ist und daß die Bewegung in der Regel eine gleichförmige ist, sobald der Beharrungszustand sich eingestellt hat. Die beschleunigende Kraft der Schwere wird durch die Adhäsion der Uferwände und des Grundbettes aufgehoben, so wie durch die Reibung der Luft an der Oberfläche des Wassers. Diese Ursachen bewirken dann auch die verschiedenen Geschwindigkeiten im Querschnitt, ähnlich wie bei den Röhrenleitungen. Die verschiedenen Geschwindigkeiten in einem Querschnitt werden mittelst der hydrometrischen Instrumente bestimmt. Aus diesen ergibt sich eine mittlere Geschwindigkeit. Am Boden und an den Uferwänden ist die Geschwindigkeit der Wasserfäden am kleinsten, in der Mitte oder an der tiefsten Stelle des Querschnitts, an der Oberfläche oder ein wenig unter derselben am größten.

Nimmt man die verschiedenen Tiefen im Querprofil als Abscissen und die correspondirende Geschwindigkeit als Ordinate und verbindet die Endpunkte durch eine krumme Linie, so erhält man die sogenannte Stromgeschwindigkeitsscale. Das Gesetz dieser krummen Linie ist bis jetzt noch nicht bekannt.

Bezeichnet V die größte Geschwindigkeit an der Oberfläche, v die mittlere Geschwindigkeit, so gibt die Erfahrung folgende Gleichung für jedes Maßsystem:

$$v = \frac{V(V + 0{,}24181\,g)}{V + 0{,}32146\,g} \;.\;.\;.\; 1.$$

Ist die Geschwindigkeit zwischen 0,2 Mtr. und 0,5 Mtr., so gilt auch für die Praxis genau genug folgende Gleichung:

$$v = 0{,}816\ V \;.\;.\;.\; 2.$$

Ist c die Geschwindigkeit am Grundbette, so hat man

$$c = 2v - V \;.\;.\;.\; 3.$$

Sollen die Uferwände oder das Bette überhaupt durch das Wasser nicht angegriffen werden, so darf dasselbe eine gewisse Geschwindigkeit nicht überschreiten. Erfahrungen zufolge werden nachbenannte Materialien durch die beigesetzten Geschwindigkeiten noch nicht angegriffen, während sie bei größern Geschwindigkeiten angegriffen oder fortbewegt werden.

Aufgelöste Erde	0,076	Mtr. Geschw.
Fetter Thon	0,152	" "
Sand	0,305	" "
Kies	0,609	" "
Abgerundete Kieselsteine . .	0,914	" "
Eckige Kieselsteine	1,22	" "
Conglomerate, Schiefer . .	1,52	" "
Geschichtete Felsen	1,83	" "
Ungeschichtete harte Felsen . .	3,05	" "

§. 329.

Bewegung im regelmäßigen Bette. Nehmen wir an, der Querschnitt, der benetzte Umfang und das Gefälle eines Kanals oder Flusses, Fig. 255, seien unveränderlich. Ferner sei die Oberfläche AB parallel dem Grundbette CD; β das Gefälle auf die Länge λ, oder 1 auf die Länge l, so daß man hat $\lambda : \beta = 1 : l$. Man kann nun annehmen, die ganze Wassermasse bewege sich auf einer schiefen Ebene herab, deren Neigungswinkel $= \alpha$. Die der Wassermasse correspondirende Beschleunigung G′ ist demnach ausgedrückt durch $g \sin \alpha$ oder $g . \frac{\beta}{\lambda}$; daher

$$G' = g . \frac{\beta}{\lambda} = g . \frac{1}{l} \;.\;.\;.\; 1.$$

Bei vorausgesetzter gleichförmiger Bewegung muß nun die beschleunigende Kraft dem Widerstand des Bettes gleich sein. Demnach muß die dem Widerstande correspondirende Beschleunigung auch der Be-

schleunigung G′ gleich sein. Der Widerstand ist aber, wie bei den Röhren dem Quadrate der Geschwindigkeit, dem benetzten Umfange direkt und dem Querschnitte umgekehrt proportional. Ist v die Geschwindigkeit, p der benetzte Umfang, J der Querschnitt, A ein Erfahrungs-Coefficient, so kann man die Beschleunigung ausdrücken durch $\frac{A \cdot pv^2}{J}$, oder wie bei den Röhren genauer, wenn B ein anderer Erfahrungs-Coefficient ist, durch $\frac{A \cdot p}{J}(v^2 + Bgv)$. Somit erhält man

$$G' = A \cdot \frac{pv^2}{J}$$

oder

$$G' = \frac{A \cdot p}{J}(v^2 + Bgv).$$

Setzt man aus Gl. 1 den Werth von G′, so erhält man nach dem ersten der beiden Ausdrücke

$$g \cdot \frac{\beta}{\lambda} = g \cdot \frac{1}{l} = \frac{Apv^2}{J}$$

$$\frac{\beta}{\lambda} = \frac{1}{l} = \frac{Apv^2}{gJ}\ ;\ \beta = \frac{A\lambda pv^2}{gJ} \ldots 2.$$

Nach dem zweiten Ausdrucke erhält man

$$g \cdot \frac{\beta}{\lambda} = g \cdot \frac{1}{l} = \frac{Ap}{J}(v^2 + Bgv)$$

$$\beta = \frac{A\lambda p}{gJ} \cdot (v^2 + Bgv) \ldots 3.$$

Nach genauen Erfahrungen sind die Coefficienten

$$A = 0{,}00358;\ B = 0{,}00676.$$

Sonach erhält die Gleichung:

$$\beta = 0{,}00358\ \frac{p\lambda}{gJ}(v^2 + 0{,}00676\ v) \ldots 4.$$

§. 330.

Aus Gleichung 4 des vorigen § erhält man die mittlere Geschwindigkeit

$$v = -\ 0{,}00338\,g + g\sqrt{\left(278{,}9\ \frac{\beta J}{\lambda gp} + 0{,}00001145\right)} \ldots 1.$$

Setzt man die Wassermenge M = J . v, so erhält man

$$M = -\ 0{,}00338\,gJ + gJ\sqrt{\left(278{,}9\ \frac{\beta J}{\lambda gp} + 0{,}00001145\right)} \ldots 2.$$

Kann die Zahl 0,00001145 unter dem Wurzelzeichen vernachläßigt werden, so wird

$$v = -\ 0{,}00338\,g + \sqrt{278{,}9\ \frac{g\beta J}{\lambda p}} \ldots 3.$$

$$M = -\ 0{,}00338\ gJ + J\sqrt{278{,}9\ \frac{g\beta J}{\lambda p}} \ldots 4.$$

§. 331.

Bei größern Geschwindigkeiten kann das Glied Bgv gegen v^2 vernachläßigt werden. Für diesen Fall ist A = 0,003782. Demnach erhält man:

$$\beta = 0{,}003782 \frac{p\lambda v^2}{gJ} = 0{,}003782 \frac{pv^2}{glJ} \ldots 1$$

$$v = 16{,}26 \sqrt{\frac{g\beta J}{\lambda p}} = 16{,}26 \sqrt{\frac{gJ}{lp}} \ldots 2$$

$$M = 16{,}26\, J \sqrt{\frac{g\beta J}{\lambda p}} = 16{,}26\, J \sqrt{\frac{gJ}{lp}} \ldots 3.$$

Für Metermaß folgt:

$$v = 50{,}93 \sqrt{\frac{\beta J}{\lambda p}} = 50{,}93 \sqrt{\frac{J}{lp}} \ldots 4$$

$$M = 50{,}93\, J \sqrt{\frac{\beta J}{\lambda p}} = 50{,}93\, J \sqrt{\frac{J}{lp}} \ldots 5.$$

Für badisches Fußmaß:

$$v = 93 \sqrt{\frac{\beta J}{\lambda p}} = 93 \sqrt{\frac{J}{lp}} \ldots 6$$

$$M = 93\, J \sqrt{\frac{\beta J}{\lambda p}} = 93\, J \sqrt{\frac{J}{lp}} \ldots 7.$$

Aufg. 1. Ein gemauerter Kanal von 1490 Fuß Länge und 3 Fuß Gefälle hat einen rechteckigen Querschnitt von 8 Fuß Breite und 4 Fuß Tiefe. Welches ist die mittlere Geschwindigkeit des Wassers und welches die Wassermenge?

Aufl. Hier ist $\lambda = 1490$; $\beta = 3$; $J = 4 . 8 = 32$; $p = 8 + 2 . 4 = 16$. Setzt man diese Werthe in Gl. 6, so erhält man die mittlere Geschwindigkeit $v = 5{,}859$ Fuß. Demnach die Wassermenge für die Secunde $M = 32 . 5{,}859 = 187{,}488$ Kubikfuß.

Aufg. 2. Ein Fluß hat einen Querschnitt von 600 Quadratfuß Inhalt. Der benetzte Umfang beträgt 100 Fuß und das Gefälle auf eine Strecke von 1200 Fuß 0,25 Fuß. Wenn nun auf diese Länge das Querprofil ungeändert bleibt und das Gefälle gleichmäßig, so soll die mittlere Geschwindigkeit und die Wassermenge bestimmt werden?

Aufl. Es ist hier $\lambda = 1200$; $J = 600$; $\beta = 0{,}25$; $p = 100$. Werden diese Werthe in Gl. 6 substituirt, so ergibt sich $v = 3{,}627$. Also die Wassermenge $600 . 3{,}627 = 2176{,}2$ Kubikfuß.

Aufg. 3. Wie groß muß man die Breite eines rechteckigen Gerinnes machen, wenn das Wasser in demselben 2 Fuß hoch stehen und bei einem Gefälle von 1 auf 1000 Fuß sich mit 3 Fuß Geschwindigkeit bewegen soll?

Aufl. Es sei x die Breite des Gerinnes; dann ist $J = x . 2$; $p = x + 2 . 2 = x + 4$.; $l = 1000$; $v = 30$. Setzt man diese Werthe in Gl. 6, so erhält man

$$3 = 93 \sqrt{\frac{x . 2}{1000\,(x + 4)}}.$$

Hieraus ergibt sich $x = 4{,}338$ Fuß.

Aufg. 4. Welches Gefälle muß man einem 4 Fuß breiten, 1,5 Fuß tiefen Gerinne auf 100 Fuß Länge geben, wenn dasselbe in der Secunde 25 Kubikfuß Wasser abführen soll?

Aufl. Es ist hier $J = 4 . 1{,}5 = 6$ Quadratfuß; $M = 25$; $p = 4 + 3 = 7$; $\lambda = 100$. Nach Gl. 7 erhält man

$$25 = 93 \,.\, 6 \,.\, \sqrt{\frac{\beta \,.\, 6}{100 \,.\, 7}}$$

und hieraus ergibt sich

$$\beta = 0{,}234 \text{ Fuß}.$$

§. 332.

Die Geschwindigkeit, sowie die Wassermenge, wird bei gleichem Gefälle nach den obigen Gleichungen um so größer, je größer der Querschnitt und je kleiner der benetzte Umfang ist. Die größte Wassermenge wird demnach von einem Querprofil abgeführt werden, das den größten Flächeninhalt bei dem kleinsten Umfange besitzt. Dieser Bedingung wird am vollkommensten ein halbkreisförmiges Querprofil entsprechen. Allein ein solches ist immerhin schwer auszuführen. Man wählt daher meistens rechteckige oder trapezförmige Querprofile. Unter den rechteckigen entspricht das halbe Quadrat, Fig. 256, der obigen Bedingung am meisten, und unter den trapezförmigen ist das halbe regelmäßige Sechseck, Fig. 257, in dieser Beziehung das vortheilhafteste.

Setzt man die Höhe des halben Quadrats $= h$, so ist die Grundlinie oder Breite $= 2h$, daher der Inhalt $J = 2h^2$ und der benetzte Umfang $p = 4h$. Für ein rechteckiges Querprofil überhaupt von der Breite $= b$ und Höhe $= h$ ist $J = bh$ und $p = b + 2h$.

Für das halbe regelmäßige Sechseck, dessen Seite $= b$, findet man $J = \frac{3}{4} b^2 \sqrt{3}$ und $p = 3b$.

Ist die mittlere Breite eines symmetrisch dossirten trapezförmigen Profils $= x$, die Tiefe $= \frac{1}{2} x$, die Dossirung n füßig, so ist der Inhalt desselben $J = \frac{1}{2} x^2$, also gleich dem des halben Quadrats von gleicher Breite und Tiefe. Der benetzte Umfang ist $= x - \frac{1}{2} nx + x \sqrt{(1 + n^2)}$. Der benetzte Umfang des halben Quadrats ist aber $2x$. Sollen beide gleich sein, so muß stattfinden

$$2x = x - \frac{1}{2} xn + x \sqrt{(1 + n^2)}.$$

Demnach muß sein $n = 1\frac{1}{3}$.

Wenn daher ein symmetrisch dossirtes Profil, dessen mittlere Breite und Tiefe dieselben sind, wie die eines halben Quadrats, eine $1\,{}^1\!/_3$ füßige Dossirung hat, so ist es gleich vortheilhaft, wie das halbe Quadrat.

Ist überhaupt bei einem trapezförmigen Profil Fig. 257 die Breite $AB = b$, die Höhe $CD = h$, die Dossirung $CD = nh$, also n füßig, so erhält man $J = (b + nh)\,h$; $p = b + 2h \sqrt{(1 + n^2)}$.

Hat ein Profil, für welches man die Wassermenge bestimmen

soll, die Form ABCDEFGH, Fig. 258, so theile man dasselbe in drei Theile ABCK, KDEF, JFGH, berechne für jedes die Wassermenge besonders und addire alsdann die Resultate. Da in JF und KC keine Uferwände sind, sondern Wasserflächen, so kann man für das Hauptprofil als benetzten Umfang nicht wohl $KD + DE + EF$ nehmen, obgleich auch in KC und JF Reibung stattfindet. Man nimmt daher für das Hauptprofil gewöhnlich als benetzten Umfang an $p = CD + DE + EF + \frac{1}{2} KC + \frac{1}{2} JF$. Für die Seitenprofile oder die Vorländer nimmt man als benetzten Umfang $AB + BC - \frac{1}{2} KC$ und $HG + GF - \frac{1}{2} JF$. Man zieht deßhalb $\frac{1}{2} KC$ und $\frac{1}{2} JF$ ab, weil das Wasser in diesen Stellen von dem schneller fließenden des mittlern Profils etwas mit fortgerissen wird.

§. 333.

Vom Abfluß des Wassers bei Ueberfällen. Man unterscheidet vollkommene und unvollkommene Wehre oder Ueberfälle. Bei ersteren, Fig. 259, liegt der Unterwasserspiegel FG tiefer als die Krone der Ueberlaßschwelle CD, bei letztern, Fig. 260, liegt er höher.

Bei einem vollkommenen Wehre, Fig. 259, sei $CK = H$ die Höhe des Wassers über der Schwelle, b die Breite des Wehres. Wenn nun das Wasser vor dem Wehre keine Anfangsgeschwindigkeit hat, so gelten die Gleichungen §. 308, und es ist somit die Wassermenge, welche über das Wehr abfließt:

$$M = \frac{2}{3} \varphi \sqrt{2g} \,.\, bH \,.\, \sqrt{H} \; . \; . \; . \; 1.$$

Die mittlere Geschwindigkeit c ist

$$c = \frac{2}{3} \varphi \sqrt{2gH}$$

und die mittlere Druckhöhe

$$z = \frac{4}{9} H.$$

Ohne Anfangsgeschwindigkeit ist also die mittlere Druckhöhe $= \frac{4}{9} H$. Hat aber das Wasser vor dem Ueberfall eine Geschwindigkeit C, so entspricht dieser die Druckhöhe $\frac{C^2}{2g}$. Demnach fließt das Wasser ab bei einer mittlern Druckhöhe $= \frac{4}{9} H + \frac{C^2}{2g}$. Also ist die mittlere Geschwindigkeit $= \varphi \sqrt{2g \left(\frac{4}{9} H + \frac{C^2}{2g} \right)} = \varphi \sqrt{\left(\frac{8g}{9} H + C^2 \right)}$,

folglich die Wassermenge:

$$M = \frac{2}{3} \varphi bH \sqrt{\left(\frac{8g}{9} . H + C^2\right)} \quad . \; . \; . \; 2.$$

§. 334.

Um die Wassermenge bei einem unvollkommenen Ueberfall zu bestimmen, muß man die Ausflußöffnung AC, Fig. 260, in zwei Theile AB und BC abtheilen. Der obere Theil ist wie ein vollkommener Ueberfall zu betrachten, der untere als eine ganz untergetauchte Oeffnung. Es sei AB = H, BC = h, b die Breite des Wehres, φ der Contractionscoefficient für den obern Theil, φ' für den untern. Hat das Wasser keine Anfangsgeschwindigkeit, so ist die Wassermenge für den obern Theil $= \frac{2}{3} \varphi bH \sqrt{2gH}$ und für den untern $= \varphi' bh \sqrt{2gH}$, also für die ganze Oeffnung

$$M = \frac{2}{3} \varphi bH \sqrt{2gH} + \varphi' bh \sqrt{2gH} \quad . \; . \; . \; 1.$$

Bei einer Anfangsgeschwindigkeit C ist für den obern Theil die mittlere Druckhöhe $\frac{4}{9} H + \frac{C^2}{2g}$ und für den untern $H + \frac{C^2}{2g}$, somit die Wassermenge:

$$M = \frac{2}{3} \varphi b H \sqrt{\left(\frac{8g}{9} H + C^2\right)} + \varphi' bh \sqrt{(2gH + C^2)} \quad . \; . \; . \; 2.$$

In den gewöhnlichen Fällen der Anwendung kann man nehmen $\varphi = 0{,}61$; $\varphi' = 0{,}62$.

Viertes Kapitel.

Vom Stoß des Wassers.

§. 335.

Einleitung. Das bewegte Wasser wirkt nicht nur durch sein Gewicht als bewegende Kraft, sondern auch durch seinen Stoß, indem es den festen Körpern, welche sich seiner Richtung entgegensetzen, einen Theil seiner Bewegung mittheilt. Es ist aber der Wasserstoß von dem Stoße fester Körper wesentlich verschieden. Bei letztern wird der Stoß in einer unmerklich kleinen Zeit vollendet. Bei ersterm kommen unendlich viele Wassertheile in ununterbrochener Reihenfolge nach und nach zur Wirkung und üben so einen fortwährenden Druck gegen einen festen Körper aus. Man heißt deßhalb den Wasserstoß auch den hydraulischen Druck. Das Wasser wirkt auch noch in negativer Weise, nämlich durch seinen Widerstand, welchen es den Körpern, die sich darin bewegen, entgegensetzt.

Je nach der Stoßfläche unterscheidet man den Stoß auf ebene und krumme Flächen.

Der Stoß heißt gerade, wenn die Richtung normal auf die gestoßene Fläche geht, schief, wenn dieß nicht der Fall ist. Der Stoß heißt ein absoluter Stoß, wenn die gestoßene Fläche in Ruhe ist, ein relativer Stoß, wenn sich auch die gestoßene Fläche bewegt.

In Bezug auf die Größe der Stoßfläche im Vergleich mit der Durchschnittsfläche des anstoßenden Wassers unterscheidet man:

1) den Stoß eines isolirten Strahles,
2) den Stoß in der begrenzten Flüssigkeit,
3) den Stoß in der unbegrenzten Flüssigkeit.

Stoß eines isolirten Strahles.

§. 336.

Absoluter gerader Stoß. Wir wollen annehmen, ein Wasserstrahl trete aus einer horizontalen Röhre AB, Fig. 261, und treffe die feste, verticale Ebene MN so, daß sämmtliche Wassertheile zum Stoße gelangen. Es sei V die Geschwindigkeit des Wassers, mit welcher die Fläche getroffen wird; h die dazu gehörige Geschwindigkeitshöhe; M das in der Zeiteinheit aufschlagende Wasservolumen; i der Querschnitt des Strahls, γ das Gewicht einer Kubikeinheit Wasser; P die Stoßkraft. Nun ist die in der Zeit t auftreffende Wassermasse $= \frac{Mt\gamma}{g}$. Denkt man sich die Zeit t in unendlich viele oder in n gleiche Theile getheilt, und wird in jedem Zeittheilchen $= \frac{t}{n}$ der ganzen Wassermasse die gleiche Geschwindigkeit genommen, so daß dieselbe in der Zeit t ihre ganze Geschwindigkeit verliert, so wird dazu dieselbe Kraft erforderlich sein, als wenn man einer unendlich kleinen Wassermasse in jedem Zeittheilchen die ganze Geschwindigkeit V nimmt. Die Geschwindigkeit, welche im ersten Falle der Wassermasse jedesmal genommen wird, ist $\frac{V}{n}$, somit ist die entsprechende Kraft $\frac{M\gamma t}{g} . \frac{V}{n}$. Im zweiten Falle wird der Wassermasse $\frac{M\gamma t}{gn}$ jedesmal die Geschwindigkeit V genommen, also ist hier die entsprechende Kraft $\frac{M\gamma t}{gn} . V$. Die Kräfte sind somit in beiden Fällen einander gleich. Ist nun G die correspondirende Beschleunigung, so ist dieselbe gleich der Stoßkraft, dividirt durch die Masse; daher $G = \frac{P}{M\gamma t} . g$. Ferner ist $V = Gt$, also

$$V = \frac{P}{M\gamma t} . gt = \frac{P}{M\gamma} . g.$$

Hieraus folgt die Stoßkraft

$$P = \frac{MV\gamma}{g}.$$

Nun ist $M = iV$, also erhält man auch:

$$P = \frac{iV^2\gamma}{g}.$$

Es ist aber $\frac{V^2}{2g} = h$ oder $\frac{V^2}{g} = 2h$, somit erhält man

$$P = 2ih\gamma \ldots 1$$

d. h. der absolute gerade Stoß ist gleich dem Gewicht eines Wasserprismas, dessen Grundfläche dem Querschnitt des Strahles und dessen Höhe der doppelten Geschwindigkeitshöhe des Wassers gleich ist.

Dieses ist nun die theoretische Stoßkraft. Für einen andern Strahl sollen P', i', V', h', γ' dieselbe Bedeutung haben, wie oben, dann ist

$$P' = \frac{i'V'^2 . \gamma'}{g} = 2i'h'\gamma'.$$

Es verhält sich also

$$P : P' = 2ih\gamma : 2i'h'\gamma'$$

oder es ist

$$P = \frac{P}{i'h'\gamma'} . ih\gamma.$$

Setzt man $\frac{P'}{i'h'\gamma'} = k$, so erhält man die Gleichung für den wirklichen Stoß:

$$P = kih\gamma \ldots 2.$$

Der Coefficient k muß durch Erfahrung gefunden werden. Die obige Herleitung setzt voraus, daß sämmtliche Wassertheile zum Stoße gelangen und ihre ganze Geschwindigkeit verlieren. Dieses ist aber in der Wirklichkeit nicht immer der Fall, und es weicht deßhalb k von dem Coefficienten 2 des theoretischen Stoßes meistens ab. Ist die angestoßene Fläche wenigstens 10mal so groß, als der Querschnitt des Strahls, so ist k nahezu = 2 oder 1,9. Es hat sich als vortheilhaft erwiesen, die Stoßfläche mit Randleisten zu versehen. Man hat dabei schon den Coefficienten k zu 4 und darüber gefunden.

§. 337.

Schiefer Stoß. Wenn der Strahl AB, Fig. 262, die Ebene MN unter dem Winkel α trifft, so kann man die Geschwindigkeit $V = AB$ zerlegen in zwei rechtwinkelige Seitengeschwindigkeiten. Die zur Fläche normale Seitengeschwindigkeit $AG = V \sin \alpha$ ist allein von Wirkung. Will man demnach die Stoßkraft auf die Ebene MN bestimmen, so darf man nur in die Gleichungen des vorigen §. $V \sin \alpha$ statt V setzen. Somit erhält man für den theoretischen Stoß:

$$P = \frac{V \sin \alpha M\gamma}{g} = \frac{iV^2 \sin \alpha}{g} = 2ih\gamma \sin \alpha \ldots 1$$

und für den wirklichen Stoß:

$$P = \frac{k}{2g} VM\gamma \sin\alpha = \frac{k}{2g} . iV^2 \sin\alpha = kih\gamma \sin\alpha \ . \ . \ . \ 2.$$

Es ist also der schiefe Stoß dem Sinus des Neigungswinkels des Strahls gegen die Ebene proportional.

Wenn man die normale Stoßkraft DB in zwei rechtwinkelige Seitenkräfte zerlegt, von denen die eine BC in die Richtung des Strahles fällt, und die andere BE normal darauf, so nennt man die erstere Kraft BC den Parallelstoß. Es ist aber BC = p = P sin α. Der theoretische Werth des Parallelstoßes ist sonach

$$p = \frac{V \sin^2 \alpha M\gamma}{g} = \frac{iV^2 \sin^2\alpha}{g} = 2ih\gamma \sin^2\alpha \ . \ . \ . \ 1$$

und der wirkliche

$$p = \frac{k}{2g} . VM\gamma \sin^2\alpha = \frac{k}{2g} . iV^2\gamma \sin\alpha = kih\gamma \sin^2\alpha \ . \ . \ . \ 2.$$

Der Parallelstoß ist also dem Quadrate des Sinus des Neigungswinkels proportional.

§. 338.

Relativer Stoß. Wenn die vom Strahl normal getroffene Ebene parallel mit sich selbst in der Stoßrichtung mit der Geschwindigkeit v ausweicht, so verliert das Wasser durch den Stoß die Geschwindigkeit V — v, da es nach demselben noch die Geschwindigkeit v besitzt. Man hat demnach in die Gleichungen für den absoluten Stoß nur V — v statt V zu setzen, um die Gleichungen für den relativen Stoß zu erhalten. Für den geraden relativen Stoß ist daher die Stoßkraft:

$$P = \frac{(V - v) M\gamma}{g} = \frac{V (V - v) i\gamma}{g} \ . \ . \ . \ 1.$$

Bei dem schiefen Stoß hat man V sin α — v statt V zu setzen, und es ist dann

$$P = \frac{(V \sin\alpha - v) M\gamma}{g} = \frac{V (V \sin\alpha - v) i\gamma}{g} \ . \ . \ . \ 2.$$

Kommt die bewegte Fläche dem Strahle entgegen, so ist v negativ zu nehmen, und man muß für diesen Fall in den obigen Gleichungen das Zeichen von v ändern, und dort + v statt — v setzen.

Stoß im begrenzten Wasser.

§. 339.

Stoß im Gerinne. Wenn sich das Wasser in einem Gerinne gegen eine ausweichende Fläche oder Schaufel bewegt, welche nur sehr geringen Zwischenraum an den Gerinnwänden läßt, so daß man annehmen kann, die ganze Wassermasse gelange zum Stoß, dann gelten hier dieselben Formeln wie bei dem Stoß eines isolirten Strahles. Es ist daher mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungen der theoretische Wasserstoß in einem Gerinne

$$P = \frac{(V - v) M\gamma}{g} = \frac{V (V - v) i\gamma}{g} \ldots 1$$

und der wirkliche Stoß

$$P = \frac{k}{2g} . V (V - v) i\gamma \ldots 2.$$

Der Coefficient k kann hier sogar den Werth 2 übersteigen, und es wurde derselbe schon 3,35 gefunden. Die Erfahrung zeigt auch, daß derselbe durch Anwendung der Randleisten auf beiden Seiten der Schaufeln gesteigert werden kann.

§. 340.

Stoß und Widerstand in einem Kanal. Wenn ein Schiff in einem Kanal bewegt wird, so setzt ihm das Wasser einen Widerstand entgegen, welcher nicht allein von der Form des Schiffers, sondern auch von den Dimensionen des Kanals abhängt. Dieser ist um so größer, je schmaler der Kanal im Verhältniß zur Breite des Schiffes ist. Die Erfahrung lehrt, daß die Breite des Kanals etwa 4 bis $5^1/_2$mal so viel betragen muß als die Schiffsbreite, und sein Querschnitt etwa 6mal so groß sein soll als der des Schiffes, um den möglichst geringen Widerstand darzubieten.

Bedeutet i den Querschnitt des eingetauchten Theils des Schiffes, v die relative Geschwindigkeit desselben, h die dazu gehörige Geschwindigkeitshöhe, so ist der Widerstand

$$P = \frac{kiv^2\gamma}{2g} = kih\gamma.$$

Der Coefficient k ist nach der Form des Schiffes verschieden.

Für einen prismatischen Kahn, welcher an beiden Enden gerade abgeschnitten ist, und dessen Länge 6 bis 10 mal so groß ist als die Breite, hat man . . . . k = 1,1.

Für einen prismatischen Kahn mit einem Hintertheile . . . . k = 1,0.

Für einen prismatischen Kahn mit einem Hintertheile, und einem durch zwei verticale Ebenen gebildeten Vordertheile, dessen Länge der Breite gleich ist . k = 0,55.

Für einen prismatischen Kahn, bei dem die Länge des Vordertheils der doppelten Breite gleich ist . . k = 0,45.

Für einen prismatischen Kahn, bei dem das Vordertheil ein halber Cylinder mit verticaler Axe ist . . k = 0,5.

Für einen prismatischen Kahn, bei welchem das Vordertheil dadurch entsteht, daß man das Prisma unten durch eine schiefe, um 30° gegen den Horizont geneigte Ebene abschneidet . . . . k = 0,45.

Für Kähne von der Form der Seeschiffe . . . k = 0,18.

Bei Anwendung der obigen Coefficienten ist nicht nur die Stoßwirkung, sondern auch die der Adhäsion an den Schiffswänden berücksichtigt, wenn die Geschwindigkeit v nicht kleiner ist als 0,3 Mtr.

Diese Coefficienten gelten für einen Kanal, der die oben angegebene verhältnißmäßige Breite hat. Wird aber der Kanal enger, so wächst der Widerstand, und man muß für die gewöhnlichen Fälle den Werth des obigen Coefficienten um die Hälfte vergrößern.

Stoß im unbegrenzten Wasser.

§. 341.

Wenn das Wasser eines breiten Stromes, oder ein unbegrenztes Wasser gegen einen festen Körper stößt, so ist die Wirkung des geraden Stoßes im Allgemeinen noch wie bei den vorigen Fällen. Jedoch müssen die oben hergeleiteten Formeln noch durch Erfahrungscoefficienten etwas modificirt werden.

Das Wasser, welches gegen einen solchen Körper stößt, verliert nicht seine ganze Geschwindigkeit, sondern es wird schon in einiger Entfernung von dem Körper auf beiden Seiten abgelenkt, und bewegt sich in eigenthümlichen Linien an demselben hin. Ferner ist nicht, wie im Zustand der Ruhe, der hydrostatische Druck auf die Vorder- und Hinterfläche gleich, sondern derselbe ist an der Vorderfläche durch das Vorderwasser größer und an der Hinterfläche durch das Kielwasser geringer, indem das Wasser an der Vorderfläche sich aufstaut und an der Hinterfläche sich vertieft. Die Drücke auf den beiden Seiten heben sich zwar auf, jedoch hat die Adhäsion, namentlich bei langen Körpern einen Einfluß, welcher bei einer großen Geschwindigkeit dem Quadrate derselben proportional ist.

Haben V, v, i, h, γ die bisherige Bedeutung, und ist k der entsprechende Erfahrungscoefficient, so hat man für die Stoßkraft im unbegrenzten Wasser:

$$P = ki\gamma \frac{(V - v)^2}{2g} = kih\gamma \;.\;.\;.\; 1.$$

Ist der Körper in Ruhe, so wird $v = 0$, also

$$P = \frac{ki\gamma V^2}{2g} = kiH\gamma \;.\;.\;.\; 2$$

wenn H die zu V gehörige Geschwindigkeit bezeichnet. Wenn der Körper sich dem anstoßenden Wasser mit der Geschwindigkeit v entgegenbewegt, so folgt:

$$P = ki\gamma \frac{(V + v)^2}{2g} \;.\;.\;.\; 3.$$

Der Erfahrungscoefficient k ist verschieden in dem Falle, wo der ruhende Körper von dem Wasser gestoßen wird von jenem, wo der Körper in dem ruhenden Wasser bewegt wird. Auch ändert er sich mit dem Verhältniß der Breite zur Länge des Körpers. Bezeichnet L die Länge des Körpers, D den Durchmesser eines cylindrischen oder $D = \sqrt{i}$ eines prismatischen Körpers, so hat man für Stoß und Widerstand

$$P = ki\gamma \frac{v^2}{2g} \;.\;.\;.\; 4.$$

Der Werth des Coefficienten k ist enthalten in folgender Tabelle.

Verhältniß $\frac{L}{D}$ der Länge des Körpers zu seinem Durchmesser.	Werthe von k	
	für den Wasserstoß gegen ruhende Körper.	für den Widerstand im ruhigen Wasser.
0,00	1,8636	1,2540
0,50	1,8476	1,2690
1,00	1,4786	1,2824
1,25	1,4274	1,2888
1,50	1,3890	1,2946
1,75	1,3610	1,3004
2,00	1,3418	1,3058
2,25	1,3296	1,3110
2,50	1,3234	1,3158
2,67	1,3222	1,3200
2,75	1,3232	1,3210
3,00	1,3290	1,3252
4,00	1,3354	1,3416
5,00	1,3598	1,3560
6,00	1,3670	1,3680
7,00	1,3778	1,3786
8,00	1,3878	1,3880

Aufg. Ein prismatischer Körper von 8 Fuß Länge und 4 Quadratfuß Querschnitt wird in ruhigem Wasser mit einer Geschwindigkeit von 4,5 Fuß in seiner Längenrichtung bewegt, welches ist die dazu nöthige Kraft?

Aufl. Hier hat man nach Gl. 1 die Geschwindigkeit $V = 0$, $v = 4,5$; $i = 4$; und wegen $D = \sqrt{4} = 2$ ist $\frac{L}{D} = \frac{8}{2} = 4$, also $K = 1,3416$. Somit

$$P = 1,3416 \,.\, 4 \,.\, 54 \,.\, \frac{4,5^2}{2 \,.\, 32,696} = 89,7 \text{ Pfd.}$$

Fünfter Abschnitt.

Aerostatik.

§. 342.

Einleitung. Die Aerostatik handelt vom Gleichgewicht der elastischflüssigen Körper. Da diese Körper flüssig und schwer sind, so gelten für sie auch die in der Hydrostatik entwickelten Gesetze. Sie besitzen aber außer diesen Eigenschaften noch die der Elasticität in hohem Grade, und dadurch unterscheiden sie sich wesentlich von den tropfbarflüssigen Körpern. In dieser Beziehung müssen wir nun die Gesetze des Gleichgewichts noch kennen lernen. Als Repräsentant der elastischflüssigen Körper oder der Gasarten wird die atmosphärische Luft betrachtet, und wir werden hauptsächlich von dieser sprechen, indem alle Gesetze, welche hier abgeleitet werden, auch auf alle andern Gasarten gelten.

Vermöge ihrer Elasticität sucht die Luft beständig einen immer größern Raum einzunehmen. Ist sie daher in einem Gefäße eingeschlossen, so übt sie in Folge ihrer Expansivkraft auf alle Theile der Gefäßwände nach allen Richtungen einen Druck aus. Abstrahirt man von der ohnehin geringen Schwere, so ist dieser Druck auf alle Punkte gleich groß.

§. 343.

Druck der Atmosphäre. Nimmt man eine 30 pariser Zoll lange, an einem Ende zugeschmolzene Glasröhre AB, Fig. 263, füllt dieselbe ganz mit Quecksilber, und stürzt sie dann in eine senkrechte Stellung um, indem man mit der einen Hand die Oeffnung so verschließt, daß keine Luft in die Röhre treten kann, und taucht alsdann das offene Ende A in ein bis FG mit Quecksilber gefülltes Gefäß, so wird bei verticaler Stellung der Röhre das Quecksilber in derselben etwa bis C herabsinken. Die Quecksilbersäule HC wird von der auf die Oberfläche FG des Quecksilbers drückenden atmosphärischen Luft getragen oder von derselben im Gleichgewicht erhalten. Diese Quecksilbersäule mißt somit den Druck der Atmosphäre. Dieser Versuch wurde zuerst von dem italienischen Mathematiker Torricelli angestellt und ist deßhalb in der Physik unter dem Namen der Torri-

cellische Versuch bekannt. Der luftleere Raum BC heißt die Torricellische Leere. Wird dieser Apparat noch mit einer genau eingetheilten Scale und einem Zeiger versehen, so hat man das gewöhnliche Gefäßbarometer.

Das Barometer dient hauptsächlich zur Messung des Luftdrucks. Der Luftdruck ist zwar nicht an allen Orten und zu allen Zeiten gleich, daher auch die Höhe der Quecksilbersäule HC veränderlich. Man hat bei 0 Grad Temperatur die Höhe derselben an der Meeresoberfläche zu 28 par. Zoll, oder zu 0,76 Meter gefunden, und nimmt diese bei den gewöhnlichen Rechnungen als das Maß des Drucks der Atmosphäre an.

Die Luft in gewöhnlichem Zustande kann also eine Quecksilbersäule von 0,76 Meter tragen, oder im Gleichgewicht erhalten. Das Quecksilber ist nun ohngefähr 13,59 mal schwerer als das Wasser. Eine Wassersäule, welche eine Höhe von $0,76 . 13,59 = 10,33$ Mtr. hat, ist demnach so schwer wie eine Quecksilbersäule von 0,76 Mtr. Höhe. Es kann sonach die atmosphärische Luft eine Wassersäule von 10,33 Mtr. im Gleichgewicht erhalten, und der Druck einer Atmosphäre kann folglich auch durch eine solche Wassersäule gemessen werden.

Da wir nun die Höhe der Quecksilbersäule kennen, welche die atmosphärische Luft zu tragen vermag, so können wir auch den Luftdruck auf irgend eine Fläche bestimmen. Der Druck der Atmosphäre auf einen Quadratmeter Fläche ist gleich dem Gewicht einer Quecksilbersäule von 1 Quadratmeter Grundfläche, und 0,76 Mtr. Höhe, oder gleich $1 . 0,76 . 13,59 . 1000 = 10330$ Kilogramm. Der Druck auf einen Quadratcentimeter ist somit gleich 1,033 Kilgr. Ist allgemein P der Druck auf die Fläche F; h die Höhe der Quecksilbersäule; γ das Gewicht einer Kubikeinheit Wasser, so hat man:

$$P = 13,59\, h . \gamma . F.$$

Aufg. 1. Welches ist der Atmosphärendruck auf 10,5 Quadratmeter Fläche?

Aufl. Hier ist $h = 0,76$; $\gamma = 1000$; $F = 10,5$, daher

$$P = 13,59 . 0,76 . 1000 . 10,5 = 108348,2 \text{ Kilgr.}$$

Aufg. 2. Welchen Druck übt die Atmosphäre auf 14 bad. Quadratfuß aus?

Aufl. Für badisches Maß ist die Höhe der Quecksilbersäule

$$= \frac{0,76 . 10}{3} = 2,533 \text{ Fuß}; \gamma = 54 \text{ Pfd.}; F = 14; \text{ also}$$

$$P = 13,59 . 2,533 . 54 . 14 = 26052,14 \text{ Pfd.}$$

Die Spannung des Dampfes wird häufig in Atmosphären angegeben. Dampf von einer Atmosphäre Spannung, oder einfacher Dampf hat dieselbe Spannkraft wie die Atmosphäre, und übt auf die gleiche Fläche denselben Druck aus wie diese. Seine Spannkraft wird daher durch eine Quecksilbersäule von 0,76 Mtr. Höhe gemessen. Die Spannung des Dampfes von zwei Atmosphären wird gemessen durch eine Quecksilbersäule von $2 . 0,76 = 1,52$ Mtr. Höhe; von drei Atmosphären durch $3 . 0,76 = 2,28$ Mtr. Quecksilberhöhe u. s. w.

Der Druck des Dampfes von einer Atmosphäre Spannung auf den Quadratcentimeter ist daher 1,033 Kilgr., von 2 Atmosphären = 2.1,033 = 2,066, von 3 Atm. = 3.1,033 = 3,099 Kilgr. u. s. f. Zur Bestimmung des Drucks des Dampfes von beliebiger Spannung auf eine Fläche F gilt auch die obige Formel, wenn h die die Dampfspannung messende Quecksilberhöhe bezeichnet. So ist z. B. der Druck des Dampfes von 3 Atmosphären auf eine Fläche von 0,5 Quadratmeter

$$P = 13{,}59 . 2{,}28 . 1000 . 0{,}5 = 15492{,}6 \text{ Kilgr.}$$

§. 344.

Manometer. Die Manometer sind barometerähnliche Instrumente, welche dazu dienen, den Druck oder die Spannkraft der in Gefäßen eingeschlossenen Gase zu messen. Man hat Quecksilber- und Wassermanometer. Sie sind entweder oben offen oder verschlossen. Die verschlossenen Manometer sind entweder oben luftleer oder mit Luft angefüllt. Das oben offene Manometer ist entweder ein Hebermanometer, Fig. 264, oder ein Gefäßmanometer, Fig. 265. Ersteres ist eine zweischenkelige, zum Theil mit Quecksilber oder Wasser gefüllte Röhre, welche mit dem das Gas enthaltende Gefäß A communicirt. Strömt nun das Gas bei a in die Röhre, so wird es das Quecksilber in dem kürzern Schenkel bis b herabdrücken. Die in den beiden Schenkeln unterhalb der Horizontallinie bc befindlichen Quecksilbersäulen werden sich das Gleichgewicht halten. Steht nun das Quecksilber in dem längern Schenkel bis d, so hält die Spannung des Gases die Quecksilbersäule cd, und den Druck der Atmosphäre im Gleichgewicht. Hieraus läßt sich also die Spannkraft des Gases bestimmen, welche man auch mittelst einer angebrachten Scale ablesen kann. Bedeutet h den Barometerstand, h' = cd den Manometerstand, so ist die Quecksilberhöhe, welche die Spannung des Gases mißt, gleich h + h', somit der Druck auf irgend eine Fläche F

$$P = 13{,}59\,(h + h')\,\gamma . F.$$

Wird das Gefäßmanometer angewendet, Fig. 265, so wird das Gefäß AB, welches das Quecksilber enthält, mit dem Luftbehälter durch eine Röhre ab so in Verbindung gebracht, daß diese bei b über die Oberfläche cd des Quecksilbers im Gefäße hervorragt. Es verbreitet sich dann die Luft über die Quecksilberoberfläche, und treibt das Quecksilber in der Röhre fg so weit in die Höhe, bis ihre Spannung mit der Quecksilbersäule und mit dem Atmosphärendruck im Gleichgewicht steht. Eine Scale dient auch hier zum Ablesen der Spannkraft der eingeschlossenen Luft. Zur Bestimmung des Drucks auf eine gegebene Fläche gilt hier auch die vorige Formel.

Das oben verschlossene und luftleere Manometer, Fig. 266, ist wie ein Barometer. Die Spannung des Gases, welches durch die Röhre ab in das Quecksilbergefäß einströmt, steht im Gleichgewicht mit der Quecksilbersäule fg und wird durch diese gemessen.

§. 345.

Das Mariott'sche Gesetz. Denken wir uns ein bestimmtes Quantum Luft z. B. in einem Cylinder eingeschlossen, so übt dieselbe bekanntlich nach allen Richtungen den gleichen Druck auf gleiche Flächentheile aus. Wird dasselbe Quantum Luft nun durch irgend eine Kraft in ein kleineres Volumen zusammengepreßt, so zeigt die Erfahrung, daß hierdurch die Dichte und Spannkraft derselben, unter vorausgesetzter gleicher Temperatur, zunehmen, und zwar im directen Verhältnisse der drückenden Kraft und im indirecten Verhältnisse des Volumens, welches das Luftquantum einnimmt. Wird z. B. das Quantum Luft in die Hälfte des Raumes zusammengepreßt, so sind Dichte und Spannkraft doppelt so groß, wie vorher; wird es in ein Drittel des Raumes eingepreßt, dreimal so groß u. s. w.

Sind demnach p, p' die Spannkräfte derselben Luftmasse, wenn sie die Räume v, v' einnimmt, d, d' die entsprechenden Dichten, so findet sofort folgendes Gesetz statt:

$$d : d' = p : p' = v' : v.$$

Dieses von Mariotte gefundene und nach ihm benannte Gesetz spricht sich also aus:

Die Spann- oder Expansivkräfte derselben Menge Luft verhalten sich gerade wie die Dichtigkeiten und umgekehrt wie die Räume, welche sie einnimmt.

Es folgt nun auch:

$$p : p' = d\gamma : d'\gamma,$$

oder wenn das Gewicht einer Kubikeinheit Luft durch q ausgedrückt wird

$$p : p' = q : q'$$

also

$$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}.$$

Man sieht, daß für dieselbe Luftart bei derselben Temperatur der Quotient $\frac{p'}{q'}$ constant ist.

Setzt man denselben gleich Ω, so hat man

$$p = \Omega q.$$

Diesen Coefficienten Ω heißt man auch das Maß der elastischen Kraft des Gases.

§. 346.

Das Gay-Lüssac'sche Gesetz. Die Wärme oder Temperatur hat einen wesentlichen Einfluß auf die Luft. Durch Erhöhung der Temperatur wird dieselbe ausgedehnt und ihre Spannkraft vermehrt. Versuche haben dargethan, daß das Volumen einer bestimmten Luftmasse von Null Grad bei jedem Grad der Temperaturerhöhung um gleich viel zunimmt, und zwar bei jedem Grad der hunderttheiligen Scale um 0,00375 (nach andern Versuchen um 0,00365) des ursprünglichen Volumens. Wird demnach die Temperatur der Luftmasse um t Grad Celsius erhöht, so vermehrt sich das Volumen um 0,00375 t.

Ist das Volumen bei 0 Grad gleich 1, so ist es bei t Grad Wärme gleich (1 + 0,00375 t). Erhitzt man sonach einen Kubikfuß Luft von 0 Grad Temperatur bis zur Siedhitze, so nimmt dieselbe alsdann den Raum von 1,375 Kubikfuß ein. Dieses Gesetz hat Gay-Lüssac zuerst nachgewiesen, weßhalb dasselbe auch nach ihm benannt wird.

Bezeichnen v_0, v, v' die Volumina einer Luftmasse bei den Temperaturen 0^0, t, t', so hat man für unveränderte Spannung

$$v = (1 + 0{,}00375\, t).v_0$$
$$v' = (1 + 0{,}00375\, t').v_0.$$

Hieraus folgt das Verhältniß der Voluminas

$$v:v' = (1 + 0{,}00375\, t):(1 + 0{,}00375\, t')$$
$$v = \frac{v'(1 + 0{,}00375\, t)}{(1 + 0{,}00375\, t')}.$$

§. 347.

Dichtigkeit der Luft. Mit Hülfe der beiden vorigen Gesetze läßt sich nun auch die Dichtigkeit der Luft bestimmen. Es seien v_0, v, v' die Räume, welche eine Luftmasse einnimmt bei den Temperaturen 0, t, t' Grad. Bleibt die Spannung der Luft ungeändert, kann sie sich also entsprechend ausdehnen, so hat man

$$v = (1 + 0{,}00375\, t)\, v_0$$
$$v' = (1 + 0{,}00375\, t')\, v_0.$$

Hieraus folgt das Raumverhältniß

$$\frac{v}{v'} = \frac{(1 + 0{,}00375\, t)}{(1 + 0{,}00375\, t')} \; . \; . \; . \; 1.$$

Sind d, d' die Dichtigkeiten bei den Temperaturen t und t', so hat man nach Mariott'schem Gesetze:

$$d:d' = v':v$$

somit das Dichtigkeitsverhältniß

$$\frac{d}{d'} = \frac{v'}{v} = \frac{(1 + 0{,}00375\, t')}{(1 + 0{,}00375\, t)} \; . \; . \; . \; 2.$$

Aendert sich die Spannung, so seien p_0, p, p' dieselben bei den Temperaturen 0, t, t' Grad. Nun verhält sich

$$v:v_0 = p_0:p$$

also ist $v = \frac{p_0}{p}.v_0$

daher erhält man mit Rücksicht auf die Temperatur

$$v = (1 + 0{,}00375\, t)\,\frac{p_0}{p}.v_0$$

und ebenso

$$v' = (1 + 0{,}00375\, t')\,\frac{p_0}{p'}.v_0$$

folglich

$$\frac{v}{v'} = \frac{1 + 0{,}00375\, t}{1 + 0{,}00375\, t'}.\frac{p'}{p} \; . \; . \; . \; 3$$

und

$$\frac{d}{d'} = \frac{1 + 0{,}00375\,t'}{1 + 0{,}00375\,t} \cdot \frac{p}{p'} \quad \ldots 4.$$

Setzt man statt der Drücke p, p' die ihnen entsprechenden Barometerstände oder Quecksilberhöhen b, b', so wird

$$\frac{d}{d'} = \frac{1 + 0{,}00375\,t'}{1 + 0{,}00375\,t} \cdot \frac{b}{b'} \quad \ldots 5.$$

§. 348.

Gewicht der Luft. Die absoluten Gewichte der in zwei gleichen Räumen eingeschlossenen Luftmassen verhalten sich offenbar wie ihre Dichtigkeiten oder specifischen Gewichte. Sind q und q' die Gewichte einer Kubikeinheit, d, d' die Dichten, so ist q : q' = d : d' oder $\frac{q}{q'} = \frac{d}{d'}$. Daher hat man nach Gl. 5 des vorigen §

$$\frac{q}{q'} = \frac{1 + 0{,}00375\,t'}{1 + 0{,}00375\,t} \cdot \frac{b}{b'}.$$

Man hat nun durch Versuche gefunden, daß ein Kubikmeter trockene atmosphärische Luft bei 0 Grad Temperatur und 0,76 Mtr. Barometerstand 1,299 Kilogramm wiegt. Mit Hülfe dieser Erfahrung kann man nun das Gewicht eines Kubikmeters Luft von beliebiger Temperatur und Spannung aus voriger Gleichung berechnen.

Setzt man darin t' = 0; b' = 0,76 Mtr.; q' = 1,299, so folgt

$$\frac{q}{1{,}299} = \frac{1}{1 + 0{,}00375\,t} \cdot \frac{b}{0{,}76}$$

und hieraus das Gewicht eines Kubikmeters Luft bei der Temperatur t und dem Drucke b:

$$q = \frac{1{,}299}{1 + 0{,}00375\,t} \cdot \frac{b}{0{,}76} = 1{,}709 \cdot \frac{b}{1 + 0{,}00375\,t} \text{ Kilgr.}$$

In der atmosphärischen Luft befindet sich immer mehr oder weniger Wasserdampf, und zwar um so mehr, je höher die Temperatur ist. Derselbe ist leichter als die atmosphärische Luft. Um nun den Einfluß desselben in Rechnung zu ziehen, muß man den Coefficienten von t etwas vergrößern und der Erfahrung gemäß 0,004 statt 0,00375 setzen. Demnach erhält man das Gewicht eines Kubikmeters mit Wasserdampf gemischter Luft in gewöhnlichem Zustande:

$$q = 1{,}709 \cdot \frac{b}{1 + 0{,}004\,t} \text{ Kilgr.}$$

Wird jedoch die Luft in einem verschlossenen Gefäße erhitzt, so muß der erste Coefficient 0,00375 beibehalten werden.

Das Gewicht eines Kubikmeters Wasser beträgt **W** = 1000 Kilgr. Das Verhältniß des Gewichtes des Wassers zu dem der Luft ist daher

$$\frac{W}{q} = \frac{1000}{1{,}709} \cdot \frac{1 + 0{,}004\,t}{b} = 585 \cdot \frac{1 + 0{,}004\,t}{b}.$$

Für die Temperatur t = 10° und den Barometerstand 0,76 Mtr. erhält man

$$\frac{W}{q} = 585 . \frac{1 + 0{,}04}{0{,}76} = 800$$

oder

$$W = 800 . q.$$

Es ist somit das Wasser 800mal schwerer als die atmosphärische Luft.

Ein Kubikmeter Quecksilber wiegt Q = 13599 Kilgr. Es ergibt sich also das Gewichtsverhältniß von Quecksilber zu Luft

$$\frac{Q}{p} = \frac{13599}{1{,}709} = \frac{1 + 0{,}004t}{b} = 7955 . \frac{1 + 0{,}004\,t}{b} .$$

Bei Bestimmung der Gewichte elastischflüssiger Körper wird das Gewicht der atmosphärischen Luft als Einheit angenommen und damit die der andern Gase verglichen.

Ist w das Dichtigkeitsverhältniß irgend eines Gases zur atmosphärischen Luft, q' das Gewicht eines Kubikmeters dieses Gases, so erhält man

$$q' = 1{,}709 . w . \frac{b}{1 + 0{,}004\,t} .$$

§. 349.

Wir können nun auch das oben verschlossene, mit Luft angefüllte Manometer, das Luftmanometer, näher betrachten. Bevor der Zutritt des Gases, dessen Spannung man messen will, erfolgt, befindet sich in der Glasröhre bis zum Quecksilberspiegel im Gefäße blos Luft von gewöhnlicher Spannung bei der mittlern Temperatur t = 10° und dem Barometerstand 0,76 Mtr. Ist das Gas in das Gefäß eingetreten und das Quecksilber in der Röhre auf eine Höhe h gestiegen, so sei h' die Höhe der über derselben stehenden Luftsäule und x die dem Drucke der zusammengepreßten Luft entsprechende Quecksilbersäule. Nach dem Mariott'schen Gesetze ist dann

$$h' : h' + h = b : x$$

also

$$x = \frac{h + h'}{h'} . b.$$

Da nun das Gas auch noch die Quecksilbersäule h trägt, so wird die Spannung desselben gemessen durch die Quecksilberhöhe B', also ist

$$B' = h + \frac{h + h'}{h'} . b.$$

Aendert sich dabei die Temperatur der Luft t in t', so hat man nach dem Gay-Lüssac'schen Gesetze die Spannung der Luftsäule zu

$$\frac{h + h'}{h} . \frac{1 + 0{,}00375\,t'}{1 + 0{,}00375\,t} . b.$$

Demnach erhält man die der Spannung des Gases das Gleichgewicht haltende Quecksilbersäule

$$B' = h + \frac{h + h'}{h'} . \frac{1 + 0{,}00375\,t'}{1 + 0{,}00375\,t} . b.$$

Für b = 0,76 und t = 10 erhält man, wenn die ganze Röhrenlänge vom Quecksilberspiegel an gerechnet H = h + h′ gesetzt wird, die entsprechende Quecksilberhöhe B zu

$$B = h + 0{,}732\ (1 + 0{,}00375t')\ \frac{H}{h'}.$$

Hiernach läßt sich sofort der Druck auf die Quadrateinheit leicht bestimmen.

§. 350.

Barometrische Höhenmessung. Die obern Luftschichten üben durch ihre Schwere immer einen Druck auf die tiefer gelegenen aus und so ist denn die Spannung oder der Luftdruck in den verschiedenen Luftschichten verschieden. Es nimmt dieser Druck ab von unten nach oben. Wenn man daher den Barometerstand an der Oberfläche des Meeres vergleicht mit dem auf einem hohen Berge, so wird man letzteren geringer finden müssen als den erstern, da die zwischen den beiden Beobachtungsorten befindliche verticale Luftsäule nur ihren Druck auf das untere Barometer äußert und auf das obere keinen Einfluß mehr hat.

Aus den beiden Barometerständen oder der Differenz derselben läßt sich nun die Höhe des Berges oder der verticale Abstand der beiden Beobachtungsorte ableiten.

Es sei ABCD, Fig. 267, eine verticale Luftsäule vom Querschnitte CD = 1 und der Höhe AC = H. Der Barometerstand in C oder der untersten Luftschichte sei b, die Dichtigkeit der Luft daselbst d und die Spannung p. Die gleiche Bedeutung sollen b′, d′, p′ für die obere Luftschichte AB haben. Denken wir uns nun die Luftsäule in unendlich viele Schichten, alle von der gleichen Höhe Aa = x getheilt, so haben wir zuerst die Proportion $p : p' = d : d'$, also $d' = \frac{p' . d}{p}$, somit das Gewicht der Luftschichte AabB gleich $x . d' = \frac{x . p' d}{p}$. Die dieser Luftschichte entsprechende Abnahme der Spannkraft ist daher $z = \frac{x . p' d}{p}$; daraus ergibt sich $x = \frac{p . z}{dp'}$. Nun ist aber $\frac{z}{p'}$ eine sehr kleine Größe, und man kann bekanntlich setzen $\frac{z}{p'} = \log n \left(1 + \frac{z}{p'}\right)$; somit ist

$$x = \frac{p}{d} . \log n \left(1 + \frac{z}{p'}\right) = \frac{p}{d} . \log n . \frac{p' + z}{p'}$$

$$x = \frac{p}{d}\ [\log n\ (p' + z) - \log np'].$$

Setzen wir nun für p′ der Reihe nach p′ + z; p′ + 2z; p′ + 3z; . . . p′ + (n — 1) z und statt p′ + z die Werthe p′ + 2z; p′ + 3z; p′ + 4z . . .; p′ + nz, so erhalten wir durch Addition

die entsprechenden Längen x der Luftsäule von oben nach unten und zuletzt die ganze Länge oder Höhe also:

$$H = \frac{p}{d} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \log n\,(p' + z) - \log n\, p' \\ + \log n\,(p' + 2z) - \log n\,(p' + z) \\ + \log n\,(p' + 3z) - \log n\,(p' + 2z) \\ + \log n\,(p' + 4z) - \log n\,(p' + 3z) \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ + \log n\,(p' + nz) - \log n\,(p' + (n-1)\,z). \end{array} \right.$$

Demnach wird durch Addition

$$H = \frac{p}{d} \log n\,(p' + nz) - \log n\, p'.$$

Da aber offenbar $p' + nz = p$ ist, so folgt:

$$H = \frac{p}{d} \log n\, p - \log n\, p'$$

$$H = \frac{p}{d} \log n\,.\,\frac{p}{p'}.$$

Statt der Spannungen p und p′ kann man aber die sie messenden Barometerhöhen b und b′ einführen und erhält somit auch

$$H = \frac{b}{d} \log n\,.\,\frac{b}{b'} = 2{,}302\ \frac{b}{d} \log v.\frac{b}{b'} \quad \ldots\ 1.$$

Wird keine große Genauigkeit verlangt, so kann man für eine mittlere Temperatur von $16^3/_4{}^0$ R. folgende Formel von Deluc anwenden:

$$H = 10000 \log \frac{b}{b'} \text{ Toisen} \quad \ldots\ 2.$$

Für genauere Höhenmessungen muß noch die Temperatur der Luft und des Quecksilbers an den beiden Stationen berücksichtigt werden. Es sei t die Temperatur der Luft an der untern, t′ an der obern Station, T die Temperatur des Quecksilbers an der untern, T′ an der obern Station, so hat man für das 100theilige Thermometer und für die mittlere geographische Breite von 45° die Formel:

$$H = 18393 \text{ Mtr.} \left[1 + \frac{2\,(t + t')}{1000}\right] . \log \left\{ \frac{b}{b' + \frac{1}{5550}.b'(T - T')} \right\} \ldots\ 3.$$

Da b und b′ ein unveränderliches Verhältniß zu einander haben, so können diese Größen in beliebigem Maße genommen werden.

§. 351.

Aerostaten. In der Hydrostatik hatten wir den Satz, daß jeder in eine Flüssigkeit getauchte Körper so viel an seinem Gewichte verliert, als das Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeit beträgt. Dieser Satz gilt nun auch bei den elastischflüssigen Körpern. Ein Körper, welcher specifisch leichter ist als Wasser, wird in demselben, wenn er untergetaucht wird, in die Höhe steigen und dann schwimmen. Ganz gleich verhält es sich mit der atmosphärischen Luft.

Bringt man einen Körper in die atmosphärische Luft, welcher specifisch leichter ist als die Luft, z. B. zunächst der Erdoberfläche, so wird er in die Höhe steigen, und zwar so lange, bis das Gewicht der von ihm verdrängten Luftmasse dem seinigen gleich ist. Auf diesem Gesetze beruht das Steigen der Luftballone. Man verfertigt sie aus ganz feinem leichten Zeug, z. B. aus Taffet, gibt ihnen die Form, welche bei der kleinsten Oberfläche den größten Inhalt haben, also die Kugelform, und füllt sie alsdann mit einer Gasart, welche specifisch leichter ist als die atmosphärische Luft. Die Gebrüder Montgolfier füllten ihren Ballon mit erwärmter atmosphärischer Luft. Andere bedienten sich des Wasserstoffgases. In der neueren Zeit wird gewöhnlich gereinigtes Steinkohlengas genommen, welches etwa 4mal leichter ist als atmosphärische Luft. Damit der Ballon in den höhern Regionen nicht zerplatze, wird er nicht ganz mit Gas angefüllt, weil sich dasselbe in den dünnern Luftschichten muß ausdehnen können. So hat der Physiker Charles in Paris seinen am 1. December 1783 aufgestiegenen Ballon nur bis zu $\frac{27}{28}$ angefüllt.

§. 352.

Es sei nun K der Kubikinhalt des Ballons, p das Gewicht einer Kubikeinheit atmosphärischer Luft, q das Gewicht einer Kubikeinheit Gas, womit der Ballon gefüllt ist, G das Gewicht der Hülle des Ballons sammt den von ihm zu tragenden Gegenständen, P die Steigkraft des Ballons. Nun ist das Gewicht der durch den Ballon verdrängten atmosphärischen Luft gleich Kp, und das Gewicht des im Ballon befindlichen Gases gleich Kq, also ist das Gewicht der steigenden Masse Kq + G. Die Differenz dieses Gewichtes und das der verdrängten Luft gibt sofort die Steigkraft zu

$$P = Kp - (Kq + G) = K(p - q) - G \; . \; . \; . \; 1.$$

Zur nähern Erläuterung dieser Formel nehmen wir als Beispiel den oben erwähnten Ballon von Charles. Bei diesem Ballon betrug K = 10000 Kubikfuß; p = 0,8 Pfd., also das Gewicht der verdrängten Luft Kp = 800 Pfd. Da aber der Ballon nur zu $\frac{27}{28}$ angefüllt war, so ist das wirkliche Gewicht $Kp = 800 \, . \, \frac{27}{28} = 771{,}4$ Pfd. Es wurde das dazu verwendete Wasserstoffgas als $5\,{}^1\!/_2$mal leichter wie die Luft betrachtet. Demnach betrug das Gewicht des im Ballon befindlichen Gases $Kq = \frac{771{,}4}{5\,{}^1\!/_2} = 146{,}9$ Pfd. Das Gewicht des Ballons sammt Schnüren, Gondel und der beiden mitfahrenden Personen betrug 604,5 Pfd. Hiernach ergibt sich die Steigkraft:

$$P = 771{,}4 - (146{,}9 + 604{,}5) = 20 \text{ Pfd.}$$

§. 353.

Wenn der Ballon bei der Füllung um den n^{ten} Theil seines Inhaltes leer gelassen wird, so kann sich das Gas noch um den n^{ten} Theil

ausdehnen, sobald er eine gewisse Höhe erreicht hat. Es wird alsdann das Gewicht eines Kubikfußes Gas um $\frac{1}{n}$ kleiner werden. Ist also anfänglich das Gewicht eines Kubikfußes = q, so ist es in jener Höhe $q' = q - \frac{1}{n} q = \left(1 - \frac{1}{n}\right) q$. Sei nun der Barometerstand am Füllungsorte = b und in jener Höhe = b′, so hat man

$$q : q' = b : b'$$

daher

$$b' = \frac{q'}{q} . b = \left(1 - \frac{1}{n}\right) b \; . \; . \; . \; 1.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich nun auch die Höhe bestimmen, in welcher der Ballon sich vollständig aufblähen wird.

Gesetzt der Ballon werde nur bis zu $\frac{9}{10}$ seines Inhaltes gefüllt, so wäre n = 10, also $b' = \left(1 - \frac{1}{10}\right) b = 0{,}9b$ oder $\frac{b}{b'} = \frac{1}{0{,}9}$ = 1,11111. Setzt man diesen Werth in die Formel 2, §. 350, so erhält man die verlangte Höhe

H = 10000 log 1,11111 = 457,575 Toisen = 2745 ½ par. Fuß.

Man kann nun auch die Höhe bestimmen, bis zu welcher der Ballon überhaupt steigen wird. Er wird seine höchste Höhe erreicht haben, wenn nach Gl. 1 des vorigen § die Steigkraft P = 0 geworden sein wird. Nun müssen die dieser Höhe entsprechenden Werthe von p und q in diese Gleichung eingeführt werden. Es sei b″ der Barometerstand in dieser Höhe, p′ das Gewicht eines Kubikfußes der atmosphärischen Luft daselbst und q′ das von einem Kubikfuß Gas, das sich mit der atmosphärischen Luft durch Ausdehnung oder theilweise durch Entweichung aus der Sicherheitsklappe in's Gleichgewicht gesetzt hat. Man hat sofort nach erwähnter Formel

$$0 = K\,(p' - q') - G$$

also

$$G = K\,(p' - q').$$

Es verhält sich sodann

$$p : p' = q : q' = b : b''$$

und daraus

$$(p' - q') = \frac{q'}{q}\,(p - q) = \frac{b''}{b}\,(p - q);$$

demnach

$$G = K . \frac{b''}{b}\,(p - q).$$

Hieraus ergibt sich der der Steighöhe entsprechende Barometerstand

$$b'' = \frac{G . b}{K\,(p - q)} \; . \; . \; . \; 2.$$

Nehmen wir zur Anwendung dieser Formel wieder den im vorigen Paragraphen betrachteten Ballon. Es ist für diesen K (p — q)

$= 800 - \frac{800}{5\frac{1}{2}} = 647{,}6$; $G = 604{,}5$. Der Barometerstand im Augenblicke des Aufsteigens war $b = 340$ Linien. Es ergibt sich also

$$b'' = \frac{604{,}5 \cdot 340}{647{,}6} = 317{,}37 \text{ Linien.}$$

Somit erhält man $\frac{b}{b''} = \frac{340}{317{,}37} = 1{,}0713$.

Daher nach der Formel von Deluc die verlangte Höhe
$H = 10000 \log 1{,}0713 = 299{,}11$ Toisen $= 1794{,}66$ par. Fuß.

Wäre die Belastung blos 450 Pfd., so würde der Barometerstand $b'' = 236{,}257$ sein und $\frac{b}{b''} = 1{,}4491$. Es würde also der Ballon die Höhe
$H = 10000 \log 1{,}4491 = 1610$ Toisen $= 9660$ par. Fuß erreichen.

Sechster Abschnitt.

Aerodynamik.

Erstes Kapitel.

Vom Ausflusse der Luft aus Behältern.

§. 354.

Einleitung. Die Aerodynamik beschäftigt sich mit der Bewegung der elastischflüssigen Körper. Nehmen wir vorerst an, es befinde sich in einem Behälter atmosphärische Luft von gewöhnlicher Spannung, für welche der Barometerstand b sei. Bringt man in der Seitenwand desselben eine Oeffnung an, so wird die Luft daselbst weder aus- noch einströmen, weil der Druck der äußern Luft gegen die Oeffnung eben so stark ist, als der der innern, nämlich gleich b. Beide Drücke sind gleich und entgegengesetzt, daher heben sie sich auf, und es findet Gleichgewicht statt. Wird aber die Luft in dem Gefäße, etwa mittelst eines genau schließenden Kolbens, durch eine Kraft zusammengepreßt, dann wird sie aus der Oeffnung strömen, weil der Druck von innen größer ist als von außen. Zeigt ein am Gefäße angebrachtes Manometer hierbei die Höhe H, so wird der Druck der Luft im Gefäße $b + H$ sein. Da nun der Druck von außen b ist, so strömt die Luft durch die Differenz beider Drücke, also mit $b + H - b = H$ aus. Es strömt somit die Luft durch einen Druck, welcher durch die Manometerhöhe H gemessen wird, aus dem Gefäße, und der Ausfluß findet so statt, als wenn die Luft unter diesem Drucke in den leeren Raum strömte.

§. 355.

Theoretische Ausflußgeschwindigkeit und Ausflußmenge. Die Ausflußgeschwindigkeit irgend einer Flüssigkeit ist, wie wir früher schon dargethan haben, abhängig von der Höhe der Flüssigkeitssäule, welche über der Ausflußöffnung steht. Die Luft- und Gasarten sind nun demselben Gesetze unterworfen. Wir haben sofort nur die Höhe h einer gleich dichten Luftsäule zu bestimmen, welche der

Manometerhöhe H das Gleichgewicht hält. Zu dem Ende sei D die Dichte oder das specifische Gewicht der manometrischen Flüssigkeit, d die der unter dem Drucke b + H in die freie Luft ausströmenden Luftart. Alsdann ist $h : H = D : d$ oder $h = H \cdot \frac{D}{d}$. Bezeichnet v die Ausflußgeschwindigkeit, so erhält man:

$$v = \sqrt{2g \cdot H \cdot \frac{D}{d}}.$$

Ist das Manometer mit Quecksilber gefüllt, und fließt die Luft unter dem Drucke b + H bei der Temperatur t aus, so hat man nach §. 348 $\frac{D}{d} = 7955 \cdot \frac{1 + 0{,}004t}{b + H}$.

Setzt man $1 + 0{,}004t = T$, so folgt die theoretische Ausflußgeschwindigkeit für Metermaß

$$v = \sqrt{2g \cdot 7955 \cdot H \cdot \frac{T}{b + H}}.$$

$$v = 395 \sqrt{H \cdot \frac{T}{b + H}} \quad \ldots \; 1.$$

Sei a der Querschnitt der Oeffnung, und M die in der Secunde ausströmende Luftmenge, so ist $M = av$, daher die theoretische Ausflußmenge

$$M = 395\, a \sqrt{H \cdot \frac{T}{b + H}} \quad \ldots \; 2.$$

Aufg. 1. Mit welcher Geschwindigkeit strömt gewöhnliche atmosphärische Luft in den leeren Raum ein?

Aufl. Nehmen wir an, die Temparatur sei 10°. Man hat nun in Gl. 1 $b = 0$ und $T = 1{,}04$ zu setzen, alsdann erhält man

$$v = 395 \sqrt{1{,}04} = 412 \text{ Meter}.$$

Aufg. 2. Welche Luftmenge strömt aus einer kreisförmigen Oeffnung von 0,07 Mtr. Durchmesser in die freie Luft, wenn die Manometerhöhe 0,4 Mtr. und die Temperatur 14° beträgt?

Aufl. Nach Gl. 2 ist $a = \frac{(0{,}07)^2 \cdot 3{,}14}{4} = 0{,}015386$; $H = 0{,}4$; $b = 0{,}76$; $t = 14$; $T = 1 + 0{,}004 \cdot 14 = 1{,}056$; daher findet man $M = 3{,}831$ Kubikmeter. Die Ausflußgeschwindigkeit findet man zu $v = 249$ Meter.

§. 356.

Wirkliche Ausflußgeschwindigkeit und Ausflußmenge. Wie bei den tropfbarflüssigen Körpern, so findet auch hier beim Ausflusse in der Oeffnung Reibung und Zusammenziehung der Luft statt, wodurch die Geschwindigkeit und Ausflußmenge vermindert werden. Bezeichnet φ den Contractionscoefficienten, so erhält man die wirkliche Ausflußgeschwindigkeit zu

$$v = 395\, \varphi \sqrt{H \cdot \frac{T}{b + H}} \quad \ldots \; 1.$$

und die wirkliche Ausflußmenge

$$M = 395\, a\varphi \sqrt{H \cdot \frac{T}{b + h}} \quad . \; . \; . \; 2.$$

Nach Versuchen ist der Contractionscoefficient:

für Oeffnungen in dünnen Wänden . . . $\varphi = 0{,}65$;
für cylindrische Ansatzstücke . . . . $\varphi = 0{,}93$;
für nicht sehr geneigte kegelförmige Ansatzstücke $\varphi = 0{,}94$.

§. 357.

Ausfluß aus Düsen. Häufig kommen in der Anwendung Ansatzstücke vor, die ziemlich lang sind und sich gegen das Ende etwas verjüngen, wie z. B. die Düsen bei Windleitungen, Blasebälgen u. s. w. Für diese nimmt man der größern Sicherheit wegen den Coefficienten $\varphi = 0{,}93$, statt 0,94. Ist d der Durchmesser der Ausflußöffnung, so wird $a = \frac{d^2\pi}{4} = 0{,}785\, d^2$, daher

$$M = 289\, d^2 \sqrt{H. \frac{T}{b + H}} \quad . \; . \; . \; 1.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß die ausfließende Luft die dem Drucke $b + H$ entsprechende Dichte habe. Soll hiernach das Volumen M′ bestimmt werden, welches dieselbe Luftmenge unter dem Drucke b′ einnehmen wird, so hat man nach dem Mariott'schen Gesetze $M' : M = b + H : b'$ und daraus $M' = \frac{M\,(b + H)}{b'}$, daher

$$M' = 289\, \frac{d^2}{b'} \sqrt{H\,(b + H)\,T} \quad . \; . \; . \; 2.$$

§. 358.

Gewicht der Ausflußmenge. Soll das Gewicht Q der in einer Secunde ausströmenden Luftmenge bestimmt werden, so muß die Ausflußmenge M mit dem Gewicht einer Kubikeinheit Luft bei dem Drucke $b + H$ und der Temperatur t multiplicirt werden. Nach §. 348 ist aber das Gewicht eines Kubikmeters Luft unter den fraglichen Umständen ausgedrückt durch $1{,}709\, \frac{b + H}{1 + 0{,}004\, t}$ Kilogramm. Man erhält daher

$$Q = 493\, d^2 \sqrt{\frac{H\,(b + H)}{T}}.$$

§. 359.

Ausfluß der Gase im Allgemeinen. Wenn anstatt atmosphärischer Luft irgend ein anderes Gas von der Dichtigkeit δ gegen die der manometrischen Flüssigkeit unter dem Drucke der Manometer-

säule H ausfließt, so ist die Geschwindigkeitshöhe des ausfließenden Gases $\frac{H}{\delta}$, daher die Ausflußmenge

$$M = a\varphi \sqrt{2g \frac{H}{\delta}}.$$

Hat ein anderes Gas die Dichtigkeit δ' gegen die manometrische Flüssigkeit, und ist M' die Ausflußmenge desselben, so ist unter sonst gleichen Verhältnissen

$$M' = a\varphi \sqrt{2g \frac{H}{\delta'}}.$$

Hiernach ergibt sich also:

$$M : M' = a\varphi \sqrt{2g \frac{H}{\delta}} : a\varphi \sqrt{2g \frac{H}{\delta'}} = \sqrt{\delta'} : \sqrt{\delta}.$$

Die Volumina zweier Gasarten, die durch gleiche Oeffnungen und unter gleichem Druck ausfließen, verhalten sich umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus ihren Dichtigkeiten.

Wenn nun eines der beiden Gase die atmosphärische Luft ist, und β das specifische Gewicht des andern Gases (das der Luft = 1 gesetzt), so erhält man die Ausflußmenge dieses letztern Gases bei constant bleibendem Druck

$$M = M' \sqrt{\frac{1}{\beta}} \text{ oder}$$

$$M = \frac{289 d^2}{b' \sqrt{\beta}} . \sqrt{H (b + H) T}.$$

§. 360.

Wir wollen nun die oben entwickelten Formeln durch einige Aufgaben näher zu erläutern suchen.

Aufg. 1. Mit welcher Geschwindigkeit strömt gewöhnliche atmosphärische Luft in einen absolut leeren Raum aus einer Oeffnung in einer dünnen Wand bei einer Temperatur von 10° C.?

Aufl. Setzt man in die Gl. 1, §. 356 $b = 0$, $\varphi = 0{,}65$, und für die Temperatur $t = 10°$ den Werth $T = 1 + 0{,}004 . 10 = 1{,}04$, so erhält man $v = 395 . 0{,}65 . \sqrt{1{,}04} = 267{,}8$ Meter.

Aufg. 2. Welche Luftmenge strömt aus einem cylindrischen Ansatzstück von 0,07 Mtr. Durchmesser, wenn die Manometerhöhe H = 0,05 Mtr., und der Barometerstand b = 0,76 beträgt, bei einer Temperatur von 14°.

Aufl. Hier hat man in die Gl. 2, §. 356 zu setzen $a = \frac{(0{,}07)^2 . 3{,}14}{4} = 0{,}015386$; $\varphi = 0{,}93$; $H = 0{,}05$; $b = 0{,}76$; $T = 1 + 0{,}004 . 14 = 1{,}056$. Man erhält sodann:

$$M = 395 . 0{,}015386 . 0{,}93 . \sqrt{\frac{0{,}05 . 1{,}056}{0{,}76 + 0{,}05}} = 1{,}443 \text{ Kubikmeter.}$$

Aufg. 3. Welche Luftmenge liefert ein Behälter, wenn der Ausfluß aus einer Düsenöffnung von 0,06 Mtr. Durchmesser stattfindet; die Manometerhöhe H = 0,04; der Barometerstand b = 0,76 Mtr. und die Temperatur des Ortes t = 12° beträgt?

Aufl. Nach Gl. 1, §. 357 ist hier zu setzen: d = 0,06; H = 0,04; b = 0,76; T = 1 + 0,004 . 12 = 1,048. Somit erhält man:

$$M = 289 . (0{,}06)^2 . \sqrt{\frac{0{,}04 . 1{,}048}{0{,}76 + 0{,}04}} = 0{,}238 \text{ Kubikmeter.}$$

Aufg. 4. An einem Orte, für welchen die Barometerhöhe 0,744 Mtr. beträgt, fließt bei einer Temperatur von 14° atmosphärische Luft aus einem Behälter, wobei die Düsenöffnung 0,075 Mtr., die Manometerhöhe 0,03 Mtr. ist. Man soll die auf den Barometerstand von 0,76 Mtr. reducirte Luftmenge bestimmen?

Aufl. Es ist hier die Gl. 2, §. 357 anzuwenden und zu setzen: d = 0,075; b' = 0,76; b = 0,744; H = 0,03; T = 1 + 0,004 . 14 = 1,056. Man erhält sodann

$$M' = \frac{289 . (0{,}075)^2}{0{,}76} . \sqrt{0{,}03 (0{,}744 + 0{,}03) . 1{,}056} = 0{,}333 \text{ Kbkm.}$$

Aufg. 5. Man soll bestimmen, wie hoch das Quecksilber in einem Manometer stehen müsse, wenn aus der Düsenöffnung einer Windleitung von 0,07 Durchmesser, 0,4 Kubikmeter atmosphärische Luft in der Secunde strömen soll. Der Barometerstand sei 0,75, die Temperatur 12°.

Aufl. Aus Gl. 1, §. 357 erhält man:

$$H = \frac{bM^2}{289^2 d^4 T - M^2}.$$

Setzt man hier b = 0,75; M = 0,4; d = 0,07; T = 1,048, so erhält man die verlangte Manometerhöhe H = 0,064 Mtr.

Aufg. 6. Wie groß muß man die Oeffnung in der Wand eines zur Gasbeleuchtung dienenden Gasometers machen, wenn bei einer Wassermanometerhöhe von 0,05 Mtr. stündlich 1200 Kubikmeter Gas ausströmen sollen. Das Barometer zeige im Mittel 0,755 Mtr., und das Thermometer 14°?

Aufl. Ist β das specifische Gewicht des Leuchtgases, so hat man nach §. 356, Gl. 2, und mit Rücksicht auf §. 359 die Ausflußmenge in der Secunde

$$M = \frac{395\, a\varphi}{\sqrt{\beta}} . \sqrt{H . \frac{T}{b + H}}.$$

Hieraus folgt der Querschnitt der Oeffnung:

$$a = \frac{M \sqrt{\beta} . \sqrt{b + H}}{395 . \varphi . \sqrt{H . T}}.$$

Da die Ausflußmenge 1200 Kubikmeter in der Stunde betragen soll, so erhält man für die Secunde $M = \frac{1200}{3600} = 0{,}333$ Kubik-

meter. Das specifische Gewicht des Leuchtgases kann angenommen werden zu $\beta = 0{,}559$. Die Oeffnung befindet sich in einer dünnen Wand, daher $\varphi = 0{,}65$. Die Höhe der Wassersäule im Manometer ist 0,05 Mtr., also die Höhe der Quecksilbersäule $H = \frac{0{,}05}{13{,}6} = 0{,}00367$ Mtr. Ferner ist $b = 0{,}755$; $T = 1 + 0{,}004 . 14 = 1{,}056$. Setzt man diese Werthe in obigen Ausdruck, so erhält man:

$$a = \frac{0{,}333 . \sqrt{0{,}559} . \sqrt{0{,}755 + 0{,}00367}}{395 . 0{,}65 . \sqrt{0{,}00367 . 1{,}056}} = 0{,}0136.$$

Die Oeffnung muß demnach 0,0136 Quadratmeter Querschnitt haben. Für eine quadratische Oeffnung muß sofort die Seite 0,116 Mtr. und für eine kreisförmige der Durchmesser 0,131 Mtr. betragen.

Zweites Kapitel.

Von der Bewegung der Luft in Röhrenleitungen.

§. 361.

Röhrenwiderstand. Wenn eine lange Röhre, die entweder am einen Ende ganz offen oder mit einem Ansatze versehen ist, in Verbindung mit einem Behälter steht, in welchem sich gepreßte Luft von stets gleicher Spannung befindet, so wird die Luft durch diese Röhre ausfließen und einen stetigen Luftstrom erzeugen. Zeigt nun ein am Behälter angebrachtes Manometer die Höhe H, so wird ein anderes an der Ausmündung vor dem verengten Querschnitt der Röhre angebrachtes eine kleinere Höhe h zeigen. Hieraus geht hervor, daß ein Theil der Druckkraft durch den Widerstand, den die Luft in der Röhre findet und der überwunden werden muß, absorbirt wird. Der Röhrenwiderstand nimmt also die Widerstandshöhe $H - h$ in Anspruch.

Ganz so wie bei den Wasserleitungen rührt dieser Widerstand her von der Adhäsion der Luft gegen die Röhrenwand, und ist der Länge und dem innern Umfange der Röhre, sowie dem Quadrate der Geschwindigkeit direct, dagegen dem Querschnitte umgekehrt proportional.

Es sei nun L die Länge der Röhre, D der lichte Durchmesser derselben, d der der Ausflußöffnung, v die Ausflußgeschwindigkeit, v′ die mittlere Geschwindigkeit der Luft in der Röhre, und u diejenige am Ende derselben unmittelbar vor dem Ansatze, n ein Erfahrungscoefficient, so hat man die Widerstandshöhe ausgedrückt durch

$$H - h = n . \frac{L D v'^2}{D^2} = n . \frac{L v'^2}{D}.$$

§. 362.

Gleichung der Bewegung. Zunächst am Behälter ist der Druck, also auch die Dichtigkeit der Luft am größten; diese nehmen gegen die Ausmündung der Röhre immer mehr ab. Daher kann die Bewegung der Luft in der Röhre nicht wie die des Wassers eine gleichförmige sein, sondern die Geschwindigkeit muß gegen die Mündung hin immer mehr zunehmen und zwar in arithmetischer Progression. Denn wenn die gleichen Luftmassen in derselben Zeit durch einen Querschnitt gehen, so müssen sich die Lufttheile offenbar um so schneller bewegen, je weniger dicht die Luft ist. Da nun Dichtigkeit und Druck mit der Länge der Röhre proportional abnehmen, so muß die Geschwindigkeit in eben diesem Verhältnisse zunehmen. Die mittlere Geschwindigkeit muß somit in der Mitte der Röhre stattfinden. Bedeutet b den Barometerstand, so ist der Druck daselbst $\frac{1}{2}$ $(b + H + b + h) = b + \frac{1}{2} . (H + h) = b + h'$ wenn $\frac{1}{2} . (H + h) = h'$ gesetzt wird. Da nun die Geschwindigkeiten sich umgekehrt wie die Drücke verhalten und der Druck an der Ausflußmündung b + h ist, so folgt

$$u : v' = b + h' : b + h.$$

Hieraus ergibt sich $v' = u . \frac{b + h}{b + h'}$.

Ist φ der Contractionscoefficient für den Ansatz, so erhält man $u = \frac{\varphi d^2}{D^2} . v$, daher wird: $v' = \frac{\varphi d^2}{D^2} . \frac{b + h}{b + h'} . v$.

Unter sonst gleichen Umständen ist aber v^2 mit h proportional. Bezeichnet also n' einen constanten Erfahrungscoefficienten, so kann man setzen $v^2 = n'h$, demnach wird

$$v'^2 = n'\varphi^2 . \frac{d^4}{D^4} . \left(\frac{b + h}{b + h'}\right)^2 . h.$$

Setzt man diesen Werth von v'^2 in die Gleichung des vorigen §, so folgt:

$$H - h = \frac{nn'\varphi^2 d^4 L}{D^5} . \left(\frac{b + h}{b + h'}\right)^2 . h.$$

Erfahrungen haben dargethan, daß der veränderliche Faktor $\frac{b + h}{b + h'}$ in sehr enge Grenzen eingeschlossen ist und man deßhalb $nn'\varphi^2 . \left(\frac{b + h}{b + h'}\right) = k$ setzen kann, wo dann k einen constanten Mittelwerth bezeichnet. Hiernach erhält man

$$H - h = \frac{kLd^4}{D^5} . h.$$

§. 363.

Die Bewegung der Luft erleidet bei ihrem Eintritt aus dem Behälter in die Röhre durch die Contraction eine Störung, welcher Einfluß mit in Rechnung gezogen werden sollte. Ebenso müßte streng genommen das Manometer am Ende der Röhrenleitung in einem Behälter angebracht sein, das in der Ausübung gewöhnlich auf die Röhre selbst gesetzt wird, wodurch denn die in der Rechnung eingeführte Manometerhöhe h eine kleine Aenderung erleidet. Da aber der Coefficient k durch Versuche bestimmt ist, so sind in diesem schon jene erwähnten Einflüsse mitbegriffen, so genau wenigstens als es in der Praxis verlangt wird.

Durch viele Versuche ist $k = 0{,}0238$ gefunden worden. Demnach erhält man:

$$H - h = 0{,}0238 \cdot \frac{Ld^4}{D^5} \cdot h.$$

Hieraus folgt

$$h = \frac{H}{1 + 0{,}0238 \dfrac{Ld^4}{D^5}} = \frac{42HD^5}{Ld^4 + 42D^5}.$$

§. 364.

Ausflußmenge. Die Luft strömt unter der Druckhöhe h aus der Oeffnung. Setzt man den in vorigem § für h gefundenen Werth in die Gl. 1, §. 356 statt H und erwägt dabei, daß der Contractionscoefficient φ schon in der Zahl 42 enthalten ist, so erhält man mit Beibehaltung der sonstigen Bezeichnung die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = 2566 \sqrt{\frac{T}{b+h}} \cdot \sqrt{\frac{HD^5}{Ld^4 + 42D^5}} \;.\;.\;.\; 1.$$

Multiplicirt man diesen Werth mit dem Querschnitt $0{,}785d^2$ der Oeffnung, so erhält man die Ausflußmenge

$$M = 2011 \sqrt{\frac{T}{b+h}} \cdot \sqrt{\frac{HD^5}{L + \dfrac{42D^5}{d^4}}} \;.\;.\;.\; 2.$$

Die hierdurch bestimmte Luftmenge befindet sich unter dem Drucke $b + h$. Will man die Luftmenge M' bestimmen, welche unter dem Drucke b' ausströmt, so hat man

$$M' = \frac{b+h}{b'} \cdot M.$$

§. 365.

Gewicht der ausfließenden Luftmenge. Das Gewicht Q der ausfließenden Luftmenge wird gefunden, wenn man die Ausflußmenge mit dem Gewicht einer Kubikeinheit Luft multiplicirt, also für Meter und Kilogramm mit $1{,}709 \frac{b+h}{T}$. Daher erhält man:

$$Q = 1{,}709\,\frac{b+h}{T}\,.\,M = 3437\sqrt{\frac{b+h}{T}}\,.\sqrt{\frac{HD^5}{L+\frac{42D^5}{d^4}}}.$$

§. 366.

Unverengte Ausmündung. Findet am Ende der Röhre keine Verengung der Ausmündung statt, dann darf man in den obigen Gleichungen nur d = D setzen und nach Versuchen mit dem Coefficienten 0,989 multipliciren. Man erhält dann

$$M = 1989\sqrt{\frac{T}{b+h}}\,.\sqrt{\frac{HD^5}{L+42D}}.$$

§. 367.

Vergleichung der Ausflußmenge der Luft mit der des Wassers. Man kann nun die Ausflußmenge M der Luft mit der M′ des Wassers vergleichen, wenn in beiden Fällen der Druck, die Länge und der Durchmesser der Röhrenleitungen gleich sind.

Für größere Geschwindigkeiten hat man nach §. 322 in Metermaß

$$M' = 20{,}73\sqrt{\frac{HD^5}{L+36D}}.$$

Hier bedeutet H′ die dem Druck entsprechende Höhe der Wassersäule. Ist H die entsprechende Quecksilberhöhe, so hat man H′ = 13,59 H

Daher
$$M' = 76{,}45\sqrt{\frac{H'D^5}{L+36D}}.$$

Man erhält nun sehr nahe:

$$M' : M = 76{,}45 : 1989\sqrt{\frac{T}{b+h}} = 1 : 26{,}02\sqrt{\frac{T}{b+h}}.$$

Für die mittlere Breite und Temperatur ist aber anzunehmen T = 1,08 und b + h = 0,78. Demzufolge ergibt sich

$$M' : M = 1 : 30{,}16.$$

Daraus folgt also, daß bei gleichem Druck dieselbe Röhrenleitung eine 30,16mal größere Luftmenge als Wassermenge liefert.

§. 368.

Ausflußmenge eines andern Gases. Will man die Ausflußmenge eines andern Gases vom specifischen Gewichte β bestimmen, so darf man die Ausflußmenge M für die atmosphärische Luft §. 364 und 366 nur mit $\sqrt{\beta}$ dividiren. Man erhält alsdann für Röhrenleitungen mit verengter Ausmündung

$$M = \frac{2011}{\sqrt{\beta}}\,.\sqrt{\frac{T}{b+h}}\,.\sqrt{\frac{HD^5}{L+\frac{42D^5}{d^4}}}\;\ldots\;1$$

und für Leitungen mit unverengter Ausmündung

$$M = \frac{1989}{\sqrt{\beta}}\,.\sqrt{\frac{T}{b+h}}\,.\sqrt{\frac{HD^5}{L+42D}}\;\ldots\;2.$$

§. 369.

Kommen bei diesen Röhrenleitungen Wendungen oder starke Biegungen vor, so wird hierdurch ebenso wie bei den Wasserleitungen der Widerstand vermehrt. Es ist dieser Widerstand Versuchen zufolge nahe zu dem Quadrat des Sinus des Neigungswinkels proportional. Jedoch findet das Eigenthümliche statt, daß dieser Widerstand nur bis zu einer gewissen Zahl von Winkeln zunimmt und darüber hinaus wieder kleiner wird. So z. B. ist er bei 15 Winkeln kleiner als bei 7. Die genauere Feststellung dieses Einflusses ist noch nicht gelungen. In der Praxis muß man Biegungen so viel wie möglich vermeiden und im vorkommenden Falle sie gehörig abrunden.

§. 370.

Widerstand durch verengte Querschnitte. Finden sich bei einer Leitung verengte Querschnitte vor, so wird der Widerstand dadurch gleichfalls vergrößert und man muß die Widerstandshöhe für jeden derselben noch vermehren um die Größe

$$h\varphi^2 d^4 \left(\frac{\pi^2}{4\varphi'^2 a'^2} - \frac{1}{D^4}\right),$$

in welchem Ausdrucke a' den verengten Querschnitt und φ' den entsprechenden Contractionscoefficienten bedeutet.

§. 371.

Aufgaben zur nähern Erläuterung der obigen Formeln.

Aufg. 1. Bei einer Windleitung beträgt die Röhrenlänge 350 Mtr., der Röhrendurchmesser 0,12 Mtr., der Durchmesser der Düsenöffnung 0,05 Mtr. Welche Luftmenge strömt in der Secunde aus, wenn der Barometerstand des Ortes 0,75 Mtr., die Temperatur 10^0 beträgt und das Manometer am Behälter 0,056 Mtr., sowie das am Ende der Leitung 0,03 Mtr. zeigt?

Aufl. Es ist hier die Gl. 2, §. 364 anzuwenden. Nun hat man zu setzen $L = 350$; $D = 0{,}12$; $d = 0{,}05$; $H = 0{,}056$; $h = 0{,}03$; $b = 0{,}75$; $T = 1{,}04$. Somit erhält man

$$M = 2011 \sqrt{\frac{1{,}04}{0{,}75 + 0{,}03}} \cdot \sqrt{\frac{0{,}056 \,.\, 0{,}12^5}{350 + \frac{42 \,.\, 0{,}12^5}{0{,}05^4}}} = 0{,}116 \text{ Kubikm.}$$

Aufg. 2. An einem mit Leuchtgas gefüllten Gasometer befindet sich eine 150 Mtr. lange Röhre von 0,02 Mtr. Durchmesser. Das an demselben befindliche Wassermanometer zeigt 0,034 Mtr. Der Barometerstand ist 0,76 Mtr. und die Temperatur 15^0. Man soll die Ausflußmenge bestimmen?

Aufl. Man hat hier nach Gl. 2, §. 368 zu rechnen. Für Leuchtgas ist $\beta = 0{,}559$. Da das Wassermanometer 0,034 Mtr. Höhe hat, so ist die entsprechende Quecksilberhöhe $H = \frac{0{,}034}{13{,}6} = 0{,}0025$ Meter.

Für h kann annähernd ebenfalls 0,0025 Mtr. gesetzt werden. Ferner ist L = 150; D = 0,02; b = 0,76; T = 1 + 0,004 . 15 = 1,06. Somit erhält man

$$M = \frac{1989}{\sqrt{0,559}} \cdot \sqrt{\frac{1,06}{0,7625}} \cdot \sqrt{\frac{0,0025 \,.\, 0,02^5}{150 + 42 \,.\, 0,02}} = 0,00085 \text{ Kubikm.}$$

Aufg. 3. An einem Behälter befindet sich eine Röhrenleitung von 340 Mtr. Länge und 0,12 Mtr. Durchmesser. Wie groß muß man den Durchmesser der Düsenöffnung machen, wenn in der Secunde 0,14 Kubikmeter Luft ausströmen sollen? Das Quecksilbermanometer am Behälter zeigt 0,058 Mtr. und das am Ende der Leitung 0,031 Mtr., das Barometer 0,74 Mtr. bei der Temperatur von 12°.

Aufl. Aus der Gl. 2 §. 364 ergibt sich

$$d^4 = \frac{42 M^2 D^5}{2011^2 \,.\, \frac{T}{b+h} \,.\, HD^5 - LM^2}.$$

In vorliegender Aufgabe hat man nun zu substituiren L = 340; M = 0,14; D = 0,12; H = 0,058; h = 0,031; b = 0,74; T = 0,048. Sonach erhält man

$$d^4 = \frac{42 \,.\, 0,14^2 \,.\, 0,12^5}{2011^2 \,.\, \frac{1,048}{0,771} \,.\, 0,058 \,.\, 0,12^5 - 340 \,.\, 0,14^2}$$

und daraus ergibt sich d = 0,0634 Meter.

[illegible] der [illegible] Formeln.

[illegible] die Röhrenlänge 350

[illegible] der Durchmesser der Düsen-

[illegible] in der Secunde aus,

[illegible] die Temperatur 10°

[illegible] 0,056 Mtr., sowie das am

[illegible]

[illegible] Gl. 2, S. 361 [illegible]. Nun hat man

[illegible] 350; D = 0,12; δ = 0,05; H = 0,056; h = 0,03;

[illegible] T = 1,04. Sonach erhält man

$$M = 2011 \left[\frac{1{,}04}{0{,}76 + 0{,}03} \right] \left[\frac{0{,}056 \cdot 0{,}12^5}{350 + 42 \cdot 0{,}12} \right] = 0{,}116 \text{ Kubikm.}$$

Aufg. 2. An einem mit Leuchtgas gefüllten Gasometer befindet sich eine 150 Mtr. lange Röhre von 0,02 Mtr. Durchmesser. Das an demselben befindliche Wassermanometer zeigt 0,034 Mtr. Der Barometerstand ist 0,76 Mtr. und die Temperatur 15°. Man soll die Ausflußmenge bestimmen?

Aufl. Man hat hier nach Gl. 2, S. 362 zu rechnen. Für Leuchtgas ist k = 0,550. Da das Wassermanometer 0,034 Mtr. Höhe hat, so ist die entsprechende Quecksilberhöhe $H = \frac{0{,}034}{13{,}6} = 0{,}0025$ Meter.

Anhang.

Die Formel von Thomas Simpson.

Zur annähernden Bestimmung des Inhaltes einer ebenen Fläche, wie Fig. 268 und 269, hat der Engländer Thomas Simpson eine Formel gefunden, welche häufig angewendet wird. Die Figur ABDC sei begrenzt durch die gerade Abscissenlinie AB, die beiden Ordinaten AC und BD und durch die krumme Linie CEFGHJD. Um nun die Formel für den Flächeninhalt dieser Figur herzuleiten, theilen wir die Abscissenlinie AB in eine gerade Anzahl, z. B. in 6 gleiche Theile. AK = KL = MM = HN = NO = OP = a und errichten in den Theilungspunkten die Ordinaten KE, LF, u. s. w., und es sei AE = y_1, KE = y_2, LF = y_3 . . . BD = yz. Zieht man die Sehne EF, so besteht der Inhalt der Figur ACEFL aus dem Inhalt des Paralleltrapezes ACFL und dem Inhalt des vom Bogen CEF und der Sehne CF begrenzten Stückes CEFbC. Der Inhalt ACFL ist aber gleich $\frac{AL}{2}(y_1 + y_3) = \frac{2Q}{2}(y_1 + y_3) = a\,(y_1 + y_3)$. Betrachtet man den Bogen CEF als einen Parabelbogen, so ist der Inhalt der Parabelfläche CEFbC = $\frac{2}{3}$. AL . Eb. Denn wenn h die Höhe des Parabelbogens bezeichnet, so ist der Inhalt der Parabelfläche $\frac{2}{3}$ h . CF. Nun verhält sich aber h : Eb = AL : CF, daraus folgt AL . Eb = h . CF. Somit ist also der Inhalt der Fläche

$$ACEFL = a\,(y_1 + y_3) + \frac{2}{3}.AL.Eb.$$

Nun ist aber annähernd $Eb = y_2 - \frac{y_1 + y_3}{2} = \frac{2y_2 - y_1 - y_3}{2}$. Ferner ist AL = 2a. Daher erhält man auch den Inhalt

$$ACEFL = a\,(y_1 + y_3) + \frac{2}{3}\,a\,(2y_2 - y_1 - y_3) = \frac{a}{3}\,(y_1 + 4y_2 + y_3).$$

Ebenso findet man den Inhalt

$$LFGHN = \frac{a}{3} (y_3 + 4y_4 + y_5)$$

und den Inhalt

$$NHJDB = \frac{a}{3} (y_5 + 4y_6 + y_7).$$

Bezeichnet man den Inhalt der ganzen Figur mit F, so erhält man durch Addition der vorstehenden Theile

$$F = \frac{a}{3} [y_1 + y_7 + 2 (y_3 + y_5) + 4 (y_2 + y_4 + y_6)].$$

Theilt man die Abscisse überhaupt in 2 n gleiche Theile, so erhält man den ganz allgemeinen Ausdruck

$$F = \frac{a}{3}[y_1 + y_{2n+1} + 2 (y_3 + y_5 + \ldots y_{2n-1}) + 4 (y_2 + y_4 + \ldots y_{2n})].$$

Dieser Ausdruck wird die Simpson'sche Formel genannt.

Um also den Flächeninhalt zu erhalten, theilt man den Abstand zwischen den beiden äußersten Ordinaten in eine gerade Anzahl gleicher Theile, errichtet in den Theilungspunkten andere Ordinaten und bezeichnet die Ordinaten, bei der ersten anfangend, der Reihe nach mit den natürlichen Zahlen, bildet sodann die Summe aus der ersten und letzten Ordinate, der doppelten Summe der übrigen mit ungeraden Zahlen bezeichneten, der vierfachen Summe der mit geraden Zahlen bezeichneten Ordinaten und multiplicirt diese Gesammtsumme mit ein Drittel des Abstandes zweier benachbarten Ordinaten.

Diese Formel gilt auch für den Fall, wo die krumme Linie ihre convexe Seite der Abcissenaxe zukehrt, wie Fig. 269. Man wird den Flächeninhalt um so genauer erhalten, in je mehr Theile man die Abcisse theilt.

Summirung unendlicher Reihen.

1. Setzt man die Summe der natürlichen Zahlen $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots n = \Sigma (n)$, so ist bekanntlich

$$\Sigma (n) = \frac{n (n + 1)}{2}.$$

Dividirt man durch n^2, so wird

$$\frac{\Sigma (n)}{n^2} = \frac{n (n + 1)}{n^2 . 2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Für $n = \infty$ wird

$$\frac{\Sigma (n)}{n^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\infty}\right) = \frac{1}{2}$$

daher

$$\Sigma (n) = \frac{n^2}{2}.$$

2. Um die Summe der Quadratzahlen der natürlichen Zahlenreihe von unendlich vielen Gliedern zu erhalten, kann man auf folgende Art verfahren.

Es ist allgemein

$$(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$$

Setzt man analog diesem nach und nach die Zahlen 0, 1, 2, 3 . . . n für n, so erhält man

$$\begin{aligned}
(0 + 1)^3 &= \ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\
(1 + 1)^3 &= 1^3 + 3.1^2 + 3.1 + 1 \\
(2 + 1)^3 &= 2^3 + 3.2^2 + 3.2 + 1 \\
(3 + 1)^3 &= 3^3 + 3.3^2 + 3.3 + 1 \\
(4 + 1)^3 &= 4^3 + 3.4^2 + 3.4 + 1 \\
&\vdots \\
(n + 1)^3 &= n^3 + 3.n^2 + 3.n + 1
\end{aligned}$$

Addirt man sämmtliche Gleichungen und bemerkt, daß alle Glieder der linken Seite, mit Ausnahme des letzten, gleich sind der ersten Verticalreihe der rechten Seite, die sich also gegenseitig heben, so erhält man $(n + 1)^3 = 3.\Sigma(n)^2 + 3\Sigma(n) + (n + 1)$.

Dividirt man durch n^3, so wird

$$\frac{(n + 1)^3}{n^3} = 3.\frac{\Sigma (n)^2}{n^3} + 3\,\frac{\Sigma (n)}{n^3} + \frac{(n + 1)}{n^3}$$

oder

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 = 3.\frac{\Sigma (n)^2}{n^3} + \frac{3}{n}.\frac{\Sigma (n)}{n^2} + \frac{1}{n^2}.\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Für $n = \infty$ werden die Brüche $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{3}{n}$ unendlich klein oder gleich Null. Somit erhält man

$$1 = 3.\frac{\Sigma (n)^2}{n^3}.$$

Daraus folgt die Summe der Quadratzahlen

$$\Sigma (n)^2 = \frac{n^3}{3}.$$

3. Will man die Summe der Kubikzahlen der natürlichen Zahlenreihe bestimmen, so verfährt man auf folgende Weise.

Es ist allgemein

$$(n + 1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1.$$

Setzt man in diesen Ausdruck der Reihe nach 0, 1, 2, 3, . . . n für n so erhält man:

$$\begin{aligned}
(0 + 1)^4 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\
(1 + 1)^4 &= 1^4 + 4.1^3 + 6.1^2 + 4.1 + 1 \\
(2 + 1)^4 &= 2^4 + 4.2^3 + 6.2^2 + 4.2 + 1 \\
(3 + 1)^4 &= 3^4 + 4.3^3 + 6.3^2 + 4.3 + 1 \\
(4 + 1)^4 &= 4^4 + 4.4^3 + 6.4^2 + 4.4 + 1 \\
&\vdots \\
(n + 1)^4 &= n^4 + 4.n^3 + 6.n^2 + 4.n + 1.
\end{aligned}$$

Durch Addition sämmtlicher Gleichungen erhält man

$$(n + 1)^4 = 4.\Sigma (n)^3 + 6.\Sigma (n)^2 + 4.\Sigma (n) + (n + 1)$$

oder wenn man durch n^4 dividirt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^4 = 4.\frac{\Sigma(n)^3}{n^4} + \frac{6}{n}.\frac{\Sigma(n)^2}{n^3} + \frac{4}{n^2}.\frac{\Sigma n}{n^2} + \frac{1}{n^3}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Für $n = \infty$ werden die Brüche $\frac{1}{n^3}, \frac{4}{n^2}, \frac{6}{n}, \frac{1}{n}$ gleich Null, daher auch die mit ihnen behafteten Glieder, und es ist sofort

$$1 = 4.\frac{\Sigma(n)^3}{n^4}$$

somit

$$\Sigma(n)^3 = \frac{n^4}{4}.$$

4. Auf ähnliche Weise erhält man

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots n^4 = \Sigma(n)^4 = \frac{n^5}{5}$$

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots n^5 = \Sigma(n)^5 = \frac{n^6}{6}$$

und allgemein

$$1^m + 2^m + 3^m + \ldots n^m = \Sigma(n)^m = \frac{n^{m+1}}{m+1}.$$

Berichtigung.

Seite 21, Zeile 2 von unten lies: algebraischen Summe der statischen Momente der sämmtlichen gegebenen Kräfte, statt algebraischen Summe der sämmtlichen 2c. 2c.

Bitzel, J.

Die Grundzüge der Mechanik als Leitfaden bei Vorlesungen und zum Selbststudium

Bd.: [1]

Stuttgart 1854